Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Übungsblatt 16
(Ferienübungsblatt)

Aufgabe 61 (alternierende Multilinearformen)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $f\colon V^n \to K$ eine alternierende n-Linearform. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Es sei U ein Untervektorraum von V mit Basis $a_1, \ldots, a_m$, wobei $m \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist

$$\overline{f}\colon (V/U)^{n-m} \to K, (v_1 + U, \ldots, v_{n-m} + U) \mapsto f(a_1, \ldots, a_m, v_1, \ldots, v_{n-m})$$

eine alternierende $(n-m)$-Linearform. Ist f eine Determinantenform, so auch $\overline{f}$.

(b) Es sei L ein Endomorphismus von V. Dann ist

$$g\colon V^n \to K, (v_1, \ldots, v_n) \mapsto f(L(v_1), \ldots, L(v_n))$$

eine alternierende n-Linearform.

(c) Es sei L ein Endomorphismus von V. Dann ist

$$h\colon V^n \to K, (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} f(v_1, \ldots, v_{i-1}, L(v_i), v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

eine alternierende n-Linearform.

Aufgabe 62 (Determinantenform)**.** Es sei V ein Vektorraum, $b_1, \ldots, b_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Basis von V und $v \in V$ ein Vektor in V. Ferner sei D die Determinantenform mit $D(b_1, \ldots, b_n) = 1$. Berechnen Sie

$D(-b_1, \ldots, -b_n)$ und $D(b_1 + v, \ldots, b_n + v)$.

Aufgabe 63 (Determinante von Matrizen)**.** Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 19 & 19 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & \ldots & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 64 (Determinante schiefsymmetrischer Matrizen)**.** Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in K^{(n,n)}$ heißt *schiefsymmetrisch*, wenn $A^{\mathrm{T}} = -A$ gilt.
Finden Sie ein (möglichst allgemeines) hinreichendes Kriterium an K und n, so dass $\det A = 0$ für jede schiefsymmetrische Matrix $A \in K^{(n,n)}$ gilt.