Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl. Math. Katrin Siemko

Dortmund, den 17. 10. 2007

Numerische Mathematik I

1. Übung

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass für beliebige Startwerte $x_0 := a \in \mathbb{R}$ die rekursiv definierte Folge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $x_{n+1} := \cos(x_n),\ n \in \mathbb{N}_0$, gegen die eindeutig bestimmte reelle Lösung der Gleichung $x = cos(x)$ konvergiert.
Tipp: Zeigen Sie, dass für beliebige x, y im Intervall $[0, 1]$, insbesondere für $x = x_n$ und $y = x_{n+1}$, die Abschätzung gilt

$$|\cos(y) - \cos(x)| \leq \sin(1)|y - x|.$$

Aufgabe 2
Ein Rechteck R mit den Seitenlängen $a = 4$ und $b = 3$ soll in ein flächengleiches Rechteck R' überführt werden, dessen Seitenlängen sich weniger stark unterscheiden. Die längere Seite des neuen Rechtecks wird dabei zu $a' := \frac{a+b}{2}$ (Mittelwert) gewählt, die andere Seite hat dann die Länge $b' = \frac{12}{a'}$. Dieser Prozess kann iteriert werden, d.h., man kann aus R' ein neues flächengleiches, quadratähnlicheres Rechteck R'' konstruieren usw.
(i) Iterieren Sie diesen Prozess viermal, d.h. berechnen Sie die Seitenlängen von den nächsten vier Rechtecken.
(ii) Zeigen Sie, dass immer die Längen $a, a', a'' \ldots$ größer sind als die jeweiligen anderen Seitenlängen $b = \frac{12}{a}, b' = \frac{12}{a'}, b'' = \frac{12}{a''}$ usw.
(iii) Zeigen Sie, dass beim Iterationsprozess die längeren Seitenlängen $a, a', \ldots$ monoton fallend, die kürzeren dagegen monoton wachsend gegen $\sqrt{12}$ konvergieren.

Aufgabe 3
An einem ruhigen klaren Abend ohne Seegang sieht der Leuchtturmwärter von der Spitze seines Leuchtturms (Höhe $x = 49,00 \pm 0,05$m über dem Meer) das Licht eines Feuerschiffs, das im Abstand $d = 35,70 \pm 0,05$ km vom Leuchtturm vor Anker liegt (Feuerlicht $y = 9,00 \pm 0,05$ m über dem Meer), genau in der Horizontlinie. Man bestimme hieraus den Radius R der Erde. Die Lichtbrechung der Luft, die Abweichung der Meeresoberfläche von der sphärischen Form u.a. soll dabei nicht berücksichtigt werden.

Besprechung: Montag, 22.10. in den Übungsgruppen.