Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl. Math. Katrin Siemko

12. November 2007

Numerische Mathematik I

4. Übung

Aufgabe 1

Das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} & 1 \\ 10^{-5} & -10^{-5} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^{-5} \\ -2 \cdot 10^{-5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

wird in einer Arithmetik gelöst, in der die Mantisse aus drei Dezimalstellen besteht, also beispielsweise $0,125 \cdot 10^{-2}$ für $\frac{1}{800}$. Berechnen Sie das Resultat

(i) exakt

(ii) ohne Pivotwahl mit Rundung auf dreistellige Mantisse

(iii) mit Spalten-Pivotwahl und Rundung auf dreistellige Mantisse

(iv) mit Zeilen- und Spalten-Pivotwahl und Rundung auf dreistellige Mantisse, d.h. das k-te Pivotelement wird nicht nur in der k-ten Spalte sondern in der gesamten verbleibenden $(n-k+1) \times (n-k+1)$-Matrix gesucht.

2+1+2+1 Punkte

Aufgabe 2

Bestimmen Sie mit dem Cholesky-Verfahren die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 8 & 26 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & 18 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6 Punkte

Aufgabe 3

Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit folgender Blockgestalt:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix},$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times m},\ B \in \mathbb{R}^{m \times k},\ C \in \mathbb{R}^{k \times k}$ und $m + k = n$.

(i) Zeigen Sie, dass für beliebige $x \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^k$ gilt:

$$(x^T, y^T)M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x + A^{-1}By)^T A(x + A^{-1}By) + y^T(C - B^T A^{-1}B)y,$$

falls A symmetrisch und invertierbar ist.

(ii) Beweisen Sie, dass A und $C - B^T A^{-1}B$ genau dann positiv definit sind, wenn M positiv definit ist.

Hinweis: Beachten Sie bitte, dass positiv definite Matrizen immer symmetrisch und invertierbar sind. **2+2 Punkte**

Aufgabe 4

(i) Zeichnen Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ für die Normen $\|\cdot\|_1,\ \|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$.

(ii) Zeigen Sie: Für $x \in \mathbb{R}^n$ und die Vektornormen $\|\cdot\|_1,\ \|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ gilt:

(a) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$,

(b) $\frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$,

(c) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$.

4 Punkte

Abgabe: Donnerstag, den 15.11.2007 bis 12.00 Uhr.