

Numerische Mathematik I

5. Übung

**Aufgabe 1**

Beweisen Sie: Die lub-Norm in  $\mathbb{K}^{n \times n}$ , zu

(i)  $\|\cdot\|_1$  ist  $M_1(A) := \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{jk}|$  (Spaltensummennorm)

(ii)  $\|\cdot\|_\infty$  ist  $M_\infty(A) := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$  (Zeilensummennorm)

**3+3 Punkte**

**Aufgabe 2**

Berechnen Sie für die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Inverse  $A_i^{-1}$  und die Konditionszahlen  $\text{cond}_1(A_i)$ ,  $\text{cond}_\infty(A_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

**4 Punkte**

**Aufgabe 3**

Nach dem Keplerschen Gesetz bewegt sich ein Himmelskörper im Sonnensystem auf einer ebenen Bahn von Ellipsen- oder Hyperbelform, wenn Störungen durch die Planeten vernachlässigt werden. Es bezeichnen  $(r, \varphi)$  die Polarkoordinaten des Standortes der Sonne. Die Bahn des Himmelskörpers ist dann gegeben durch die "Kegelschnittgleichung"

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos(\varphi)}$$

mit einem Parameter  $p$  und der sogenannten Exzentrizität  $e$ . Für  $0 \leq e \leq 1$  handelt es sich um eine Ellipse, für  $e \geq 1$  um eine Hyperbel. Für einen neu entdeckten Himmelskörper werden die folgenden Beobachtungen gemacht:

Tag	15.01.	15.04.	15.06.	15.08	15.09.
$r$	10	5	2.5	1.3	1
$\varphi$	51°	67°	83°	108°	126°

Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate den Typ der Kometenbahn. (Bringen Sie dazu zunächst die Gleichung in eine Form, die linear in zwei Unbekannten ist.)

**6 Punkte**

**Aufgabe 4**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  eine Matrix mit vollem Spaltenrang  $\text{rg}(A) = n$ .

(i) Zeigen Sie: Die Matrix  $A^T A$  ist positiv definit.

(ii)  $A^T A$  habe die Cholesky-Zerlegung  $A^T A = GG^T$  mit  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Zeigen Sie: Die  $QR$ -Zerlegung von  $A$  ist  $A = QG^T$  mit einer orthogonalen Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

**2+2 Punkte**

**Abgabe:** Donnerstag, den 22.11.2007 bis 12.00 Uhr.