

Numerische Mathematik I  
7. Übung

**Aufgabe 1**

Sei  $f(x) = x^6 - x^4 + 3x - 2$ .

- (i) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom  $p_3$  in den Knoten  $x_0 = -2$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$  und  $x_3 = 1$
- (a) mit Hilfe der Lagrange-Grundpolynome,
  - (b) mit Hilfe der Newton-Grundpolynome,
  - (c) mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems und der Vandermonde-Matrix als Koeffizientenmatrix.
- (ii) Schätzen Sie den Interpolationsfehler für  $x \in [-1, 1]$  ab.

**8 Punkte**

**Aufgabe 2**

Zeigen Sie, dass die Tschebyscheff-Polynome  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die folgende Darstellung haben:

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \{ (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \}.$$

**3 Punkte**

**Aufgabe 3**

- (i) Zeigen Sie, dass für die Tschebyscheff-Polynome  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  die folgende Rekursionsgleichung gilt:

$$T_{m \cdot n}(x) = T_m(T_n(x)) \quad m, n \in \mathbb{N}$$

- (ii) Berechnen Sie  $T_{128}(0.8)$  mit Hilfe der Rekursionsgleichung aus (i). Wie viele Multiplikationen benötigt man jeweils, um  $T_{128}(0.8)$  nach dem Verfahren aus (i) und mit der 3-Term-Rekursionsgleichung aus der Vorlesung zu berechnen?

**3+2 Punkte**

**Aufgabe 4**

Sei  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $p(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 1$  das Hermite'sche Interpolationspolynom an  $f(x)$  in den Stützstellen  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 1$  ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass  $q(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1$  die Interpolationsbedingungen  $q(x_i) = f(x_i)$  und  $q'(x_i) = 0$ ,  $i = 0, 1, 2$  in den Stützstellen  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 1$  erfüllt.

**4 Punkte**

**Abgabe:** Donnerstag, den 7.12.2007 bis 12.00 Uhr.