Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl. Math. Katrin Siemko

10. Dezember 2007

Numerische Mathematik I

8. Übung

Aufgabe 1

Es sei eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R})$ gegeben. Für eine Stützstelle $x_0 \in \mathbb{R}$ seien die Werte $f(x_0)$, $f'(x_0)$ und $f''(x_0)$ und für eine weitere Stützstelle $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \neq x_1$ sei der Wert $f(x_1)$ bekannt. Zeigen Sie, dass es genau ein Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_3$ gibt, das diese Werte annimmt. **2 Punkte**

Aufgabe 2

S bezeichne den Vektorraum der kubischen Splinefunktionen mit natürlichen Randbedingungen zu den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

(i) Sind die folgenden Funktionen in S?

   (a) $f(x) = x^3 - x^2$,
   (b) $f(x) = x^2(x-6) - (x-2)^3$,
   (c) $f(x) = (max\{0, x-1\})^3 - \frac{x^3}{2}$.

(ii) Bestimmen Sie den interpolierenden Spline $s \in S$ für $f(x) = x^3$. Wie lautet das Ergebnis, wenn die natürlichen Randbedingungen durch $s''(x_0) = f''(x_0)$, $s''(x_2) = f''(x_2)$ ersetzt werden?

3+4 Punkte

Aufgabe 3

Sei X die Menge aller stückweise stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die 2π-periodisch auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ sind. Versehen mit

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) dx$$

wird X zu einem unitären Raum.
Es sei $V = span\{v_k \mid k = 0, \ldots, 6\} \subset X$ mit

$$\begin{aligned} v_0 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} cos(0), \\ v_{2\ell} &= cos(\ell x), \quad \ell = 1,2,3 \\ v_{2\ell-1} &= sin(\ell x), \quad \ell = 1,2,3 \end{aligned}$$

.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionen $v_k,\ k = 0, \ldots, 6$ orthogonal bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind.

(ii) Bestimmen Sie die beste Approximation an $f(x) = |x|$ im Intervall $[-\pi, \pi]$ in V.

2+3 Punkte

Aufgabe 4

Es sei $\mathcal{P}$ der Raum aller Polynome mit reellen Koeffizienten. Versehen mit $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ wird $\mathcal{P}$ zu einem unitären Raum.

(i) Es ist $\mathcal{P}_4 = span\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Berechnen Sie mit dem Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis $B = \{P_0, \ldots, P_4\}$ von $\mathcal{P}_4$.

(ii) Normieren Sie $P_0, \ldots, P_4$, so dass der Leitkoeffizient von P_i Eins ist für $i = 0, \ldots, 4$. Bestimmen Sie die Koeffizienten $\beta_0, \ldots, \beta_3,\ \gamma_1, \ldots, \gamma_3$ der 3-Term-Rekursion nach Satz 13 aus der Vorlesung.

3+3 Punkte

Abgabe: Donnerstag, den 14.12.2007 bis 12.00 Uhr.