Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl. Math. Katrin Siemko

14. Dezember 2007

Numerische Mathematik I

9. Übung

Aufgabe 1

Welches Polynom zweiten Grades $p_2(x)$ approximiert das Polynom dritten Grades $p_3(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ im Sinne der Maximumsnorm am besten? Tipp: Bedenken Sie, welche Eigenschaften $\varepsilon(x) = p_3(x) - p_2(x)$ haben sollte. **3 Punkte**

Aufgabe 2

Welche der drei folgenden Räume erfüllen die Haarsche Bedingung?

(i) $V_1 = span\{1, \frac{x^2}{x^2-1}, \frac{x^2}{x^2-2^2}, \dots, \frac{x^2}{x^2-n^2}\}$ auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$

(ii) $V_2 = span\{1, x^2, x^4, \dots, x^{2n}\}$ auf dem Intervall $[0, 1]$

(iii) $V_3 = span\{1, x^2, x^4, \dots, x^{2n}\}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$.

4 Punkte

Aufgabe 3

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie: Es existieren Orthonormalsysteme $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_r\} \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_r\} \subset \mathbb{R}^n$ und $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \mathbb{R}$, so dass

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T.$$

4 Punkte

Aufgabe 4

Es seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegungen von A_1 und A_2.

(ii) Bestimmen Sie die Pseudoinversen von A_1 und A_2.

6+3 Punkte

Abgabe: Donnerstag, den 20.12.2007 bis 12.00 Uhr.