Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl. Math. Katrin Siemko

21. Dezember 2007

Numerische Mathematik I

10. Übung

Aufgabe 1

Berechnen Sie für die Zerlegung

$$\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_5 = 5$$

mit $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$ und $x_4 = 4$ die B-Splines $N_i^{(3)}(x)$ für $i = 0, \ldots, 4$.

6 Punkte

Aufgabe 2

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$.
Beweisen Sie die folgenden in der Vorlesung nicht bewiesenen Aussagen:

(i) $N_i^{(k)}(x) > 0$ für alle $x \in (x_i, x_{i+k}),\ i = -k+1, \ldots, n-1$.

(ii) $\sum\limits_{i=-k+1}^{n-1} N_i^{(k)}(x) = 1$ für alle $x \in [a, b]$.

2+2 Punkte

Aufgabe 3

Die Fehlerdarstellung der linearen Interpolation in $[a, b]$ lautet bekanntlich

$$f(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} + \frac{1}{2}f''(\xi_x)(x-a)(x-b). \tag{1}$$

Hierbei hängt ξ_x stetig von x ab, also ist $\varphi : x \mapsto \xi_x$ in $C[a, b]$. (Das muss nicht bewiesen werden!)
Zeigen Sie mit (1), dass für $f \in C^2[a, b]$ gilt:

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] = -\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3$$

für ein $\eta \in [a, b]$.

4 Punkte

Aufgabe 4

Die Mittelpunktregel ist die interpolatorische Quadraturformel mit nur einem Knoten in der Intervallmitte,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + R_M(f).$$

Berechnen Sie mit der iterierten Trapezregel und der iterierten Mittelpunktregel Näherungen an

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Benutzen Sie dabei die Zerlegungen

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx$$

mit $t_k = -1 + \frac{2k}{n},\ k = 0, \ldots, n$, und berechnen Sie die Näherungen für $n = 1, 2, 4$.

6 Punkte

Abgabe: Donnerstag, den 10.01.2008 bis 12.00 Uhr.