

Numerische Mathematik I

11. Übung

**Aufgabe 1**

Es ist  $\int_0^1 \sin(\sqrt{x}) dx = 0.6023373 \dots$  (ohne Beweis).

(i) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_0^1 \sin(\sqrt{x}) dx = \int_0^1 [\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}] dx + \frac{2}{3}.$$

(ii) Verwenden Sie die iterierte Trapezregel für  $N = 1, 2, 4$ , um Näherungen für

(a)  $\int_0^1 \sin(\sqrt{x}) dx$

(b)  $\int_0^1 [\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}] dx + \frac{2}{3}$

zu bekommen. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

**1+6 Punkte**

**Aufgabe 2**

Bestimmen Sie für  $n = 2$  die Knoten und Gewichte der Gauß-Legendre-Quadraturformel auf dem Intervall  $[a, b] = [-1, 1]$ .

**5 Punkte**

**Aufgabe 3**

(i) Zeigen Sie, dass die zweite Spalte des Romberg-Schemas der iterierten Simpson-Regel entspricht.

(ii) Bestimmen Sie eine Näherung für den Wert des Integrals  $\int_0^1 [\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}] dx$ , indem Sie mit dem Romberg-Verfahren  $T_1^{(3)}$  berechnen.

**2+2 Punkte**

**Aufgabe 4**

Es sei

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2}}}}}}_{n\text{-mal}}, n \in \mathbb{N}$$

(i) Zeigen Sie, der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: a^*$$

existiert, und bestimmen Sie  $a^*$ .

(ii) Geben Sie eine Abschätzung für die Abweichung  $|a_n - a^*|$  an.

**2+2 Punkte**

**Abgabe:** Donnerstag, den 17.01.2008 bis 12.00 Uhr.