Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl. Math. Katrin Siemko

18. Januar 2008

Numerische Mathematik I

12. Übung

Aufgabe 1

Folgende Tabelle enthält den Beginn mehrerer Iterationsfolgen $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. Alle Iterationsfolgen konvergieren gegen $\sqrt{2}$.

x_0	2.000000000	2.000000000	2.000000000	2.000000000
x_1	1.500000000	1.428571429	2.100000000	1.500000000
x_2	1.416666667	1.414213927	1.512195121	1.437500000
x_3	1.414215686	1.414213562	1.432815665	1.420898438
x_4	1.414213562	·	1.414832461	1.416160345
x_5	·	·	1.414217605	1.414782814
x_6	·	·	1.414213563	1.414380211
x_7	·	·	1.414213562	1.414262366
x_8	·	·	·	1.414227856
x_9	·	·	·	1.414217749
x_{10}	·	·	·	1.414214789

Betrachten Sie den Iterationsfehler und versuchen Sie, die Konvergenzordnung und den asymptotischen Fehlerkoeffizienten zu bestimmen. **6 Punkte**

Aufgabe 2

Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = \sin x - 1$ mit dem Startwert $x_0 = 3$ jeweils 10 Iterierte des modifizierten Newton-Verfahrens für $\lambda = 1, 2, 3$. Wie sind die verschiedenen Ergebnisse zu erklären? **6 Punkte**

Aufgabe 3

Das Polynom $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 0, \ldots, n-1$, habe die Nullstellen $x_1^*, \ldots, x_n^*$. Beweisen Sie:

(i) $\sum_{j=1}^{n} x_j^* = -a_{n-1}$

(ii) Durch die Transformation $x \mapsto y - \frac{1}{n}a_{n-1}$ erhält man ein Polynom, für dessen Nullstellen $y_1^*, \ldots, y_n^*$ die Gleichung $\sum_{i=1}^{n} y_i^* = 0$ gilt.

Gegeben sei nun das Polynom $p(x) = x^3 - 180x^2 + 10799x - 215940$. Was sagt der Kreisesatz von Gershgorin über die Lage der Nullstellen von p aus?
Führen Sie die Transformation aus (ii) durch und überlegen Sie sich, welche Aussage Gershgorin jetzt liefert! **4 Punkte**

Aufgabe 4

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -1 \\ -1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Desweiteren sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$\varphi(x) := -Ax + b + x.$$

(i) Berechnen Sie ausgehend von $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ die ersten vier Werte $x_1, \ldots, x_4$ der Iterationsfolge $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Folge $\{x_n\}$ gegen die Lösung x^* von $Ax = b$ konvergiert und schätzen Sie mit Hilfe der a posteriori-Fehlerabschätzung des Banachschen Fixpunktsatzes

$$\| x_4 - x^* \|_\infty$$

ab.

2+2 Punkte

Abgabe: Donnerstag, den 24.01.2008 bis 12.00 Uhr.