Prof. Dr. G. Rosenberger
Dipl.-Math. T. Camps

Ausgabe: 17.10.2007
Abgabe: 24.10.2007, 12.00 Uhr

Mengentheoretische Topologie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Es sei (X, d) ein metrischer Raum.
Definiere $\mathrm{d}_1 : X \times X \to [0, 1[$ und $\mathrm{d}_2 : X \times X \to [0, 1]$ durch:

$$\mathrm{d}_1(x, y) := \frac{\mathrm{d}(x, y)}{1 + \mathrm{d}(x, y)} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{d}_2(x, y) := \min\{1, \mathrm{d}(x, y)\}.$$

Zeigen Sie, dass d_1 und d_2 Metriken auf X sind, welche das gleiche System offener Mengen erzeugen wie d.

Aufgabe 2

Zwei Metriken $\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2$ auf einer Menge M heißen äquivalent, wenn sie auf M dieselbe Topologie induzieren.
Wir betrachten nun zwei metrische Räume $(M_1, \mathrm{d}_1), (M_2, \mathrm{d}_2)$ und definieren auf $M_1 \times M_2$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x, y) &:= \mathrm{d}_1(x_1, y_1) + \mathrm{d}_2(x_2, y_2) \\ \mathrm{d}'(x, y) &:= \max\{\mathrm{d}_1(x_1, y_1), \mathrm{d}_2(x_2, y_2)\}, \end{aligned}$$

wobei $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$.
Zeigen Sie, dass d, d' äquivalente Metriken auf $M_1 \times M_2$ sind.

Aufgabe 3

Geben Sie alle Topologien der zweielementigen Menge $X = \{a, b\}$ an.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengensysteme Topologien auf der jeweiligen Obermenge sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \{U \subset \mathbb{R} \mid U = \emptyset \text{ oder } \mathbb{R} \setminus U \text{ ist endlich oder abzählbar unendlich}\} \\ \mathcal{T}_2 &= \{U \subset \mathbb{R} \mid U = \emptyset \text{ oder } U = \mathbb{R} \text{ oder } U = [a, \infty[\text{ mit } a \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{T}_3 &= \{U \subset [-1, 1] \mid 0 \notin U \text{ oder }]-1, 1[\subset U\} \end{aligned}$$