Prof. Dr. G. Rosenberger
Dipl.-Math. T. Camps

Ausgabe: 24.10.2007
Abgabe: 31.10.2007, 12.00 Uhr

Mengentheoretische Topologie

Übungsblatt 2

Aufgabe 5

Es seien E ein topologischer Raum und $A, B \subset E$.

a) Zeigen Sie: $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ und $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) Finden Sie ein Beispiel für die zweite Aussage in a).

Aufgabe 6

Sei $X = \{a, b, c, d, e\}$. Geben Sie die Topologie an, zu der die Familie

$$S = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, e\}\}$$

eine Subbasis ist.

Aufgabe 7

Es sei $X := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 1)\}$. $\mathcal{B}$ sei eine Menge von Teilmengen B von X, so dass gilt:

$$\begin{aligned} B &= \{(x,0) \in X \mid x \in \,]a,b[\,,\ a<b\} \\ \text{oder} \quad B &= \{(x,0) \in X \mid x \in \,]-a,0[\, \cup \,]0,a[\,,\ a>0\} \cup \{(0,1)\}\,. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass es genau eine Topologie auf X gibt, die $\mathcal{B}$ als Basis hat.

b) Kann die Topologie durch eine Metrik erzeugt werden?

Aufgabe 8

Es sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und V^* der Dualraum. Für $x \in V$ sei

$$\mathcal{U}(x) := \left\{ U \subset V \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt } h_1, \ldots, h_r \in V^*,\ r \in \mathbb{N}, \\ \text{mit } U(x; h_1, \ldots, h_r) \subset U \end{array} \right\},$$

wobei

$$U(x; h_1, \ldots, h_r) := \{y \in V \mid \max\{|h_i(x-y)| \mid i = 1, \ldots, r\} \leq 1\}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass es genau eine Topologie $\mathcal{O}$ auf V gibt, für die $\mathcal{U}(x)$ das Umgebungssystem von $x \in V$ ist.

b) Zeigen Sie, das für $V = \mathbb{R}^n$ die Topologie $\mathcal{O}$ mit der gewöhnlichen Topologie übereinstimmt.