Prof. Dr. G. Rosenberger
Dipl.-Math. T. Camps

Ausgabe: 31.10.2007
Abgabe: 7.11.2007, 12.00 Uhr

Mengentheoretische Topologie

Übungsblatt 3

Aufgabe 9

$\mathcal{O}$ bezeichne die von der Subbasis $\{]-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ erzeugte Topologie von $\mathbb{R}$.

a) Beschreiben Sie die Elemente von $\mathcal{O}$.

b) Erfüllt $\mathcal{O}$ die beiden Abzählbarkeitsaxiome?

Aufgabe 10

Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

a) Beweisen Sie: Erfüllt $(X, \mathcal{O})$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so enthält X eine abzählbare dichte Teilmenge.

b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung von a) i.a. falsch ist.
(*Hinweis:* Betrachten Sie $\mathbb{R}$ zusammen mit der Topologie

$$\mathcal{O} = \{U \subset \mathbb{R} \mid U \subset \mathbb{R} \text{ ist endlich}\}.$$

Dann erfüllt $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ nicht das 2. Abzählbarkeitsaxiom, aber $\mathbb{Q}$ ist eine dichte abzählbare Teilmenge von $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$.)

Aufgabe 11

Es seien $(X, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, topologische Räume.

a) Bestimmen Sie die feinste Topologie auf X, die gröber als alle $\mathcal{O}_i$ ist.

b) Bestimmen Sie die gröbste Topologie auf X, die feiner als alle $\mathcal{O}_i$ ist.
(*Hinweis:* Betrachten Sie die von $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ erzeugte Topologie.)

Aufgabe 12

Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Für $A \subset X$ ist die <u>charakteristische Funktion</u> $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\chi_A(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \notin A, \\ 1 & \text{für } y \in A. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass für $A, B \subset X$ und $y \in X$ gilt:

α) $\chi_{A \cap B}(y) = \chi_A(y) \cdot \chi_B(y)$.

β) $\chi_{A \cup B}(y) = \chi_A(y) + \chi_B(y) - \chi_A(y) \cdot \chi_B(y)$.

γ) In welchen Punkten von X ist χ_A stetig?

b) Finden Sie zwei Topologien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ auf $\mathbb{R}$, so dass für $A \subset X$ gilt:

α) χ_A ist stetig bzgl. $\mathcal{O}_1 \Leftrightarrow A$ ist abgeschlosssen in X,

β) χ_A ist stetig bzgl. $\mathcal{O}_2 \Leftrightarrow A$ ist offen in X.