

Mengentheoretische Topologie

Übungsblatt 4

Aufgabe 13

Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Abbildungen offen oder abgeschlossen sind:

- a) $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x.$
- b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2.$

Aufgabe 14

- a) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei mit der durch die euklidische Metrik induzierten Topologie versehen. Eine Abbildung $h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei definiert durch

$$h(x) := \frac{x}{\|x\|^2}.$$

($\|\cdot\|$ euklidische Norm im \mathbb{R}^n .)

Zeigen Sie, dass h ein Homöomorphismus ist.

- b)

$$Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} < 1\}$$

und

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

seien jeweils mit der obigen Topologie versehen.

Zeigen Sie, dass Q zu K homöomorph ist.

- c) Teil b) gilt auch allgemeiner:
Es sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossenes Quadrat und $K \subset \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossener Kreis.
Zeigen Sie, dass Q zu K homöomorph ist.

Aufgabe 15

Es seien E, E' metrische Räume. Zeigen Sie:

- a) $f : E \rightarrow E'$ ist genau dann stetig in $x \in E$, wenn für jede gegen x konvergierende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert.
- b) $f_n : E \rightarrow E', n \in \mathbb{N}$, seien stetige Abbildungen. Konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f : E \rightarrow E'$, so ist auch f stetig.
- c) Die Topologie auf E ist die grösste (kleinste) Topologie von E , in der für jedes $y \in E$ die Abbildung $d_y : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d_y(x) := d(x, y)$ stetig ist.