Prof. Dr. G. Rosenberger
Dipl.-Math. T. Camps

Ausgabe: 14.11.2007
Abgabe: 21.11.2007, 12.00 Uhr

Mengentheoretische Topologie

Übungsblatt 5

Aufgabe 16

Sei $E = \prod_{i \in I} E_i$ Produktraum der topologischen Räume E_i. Sei $Q = \prod_{i \in I} A_i$ ein Quader. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Topologien auf Q identisch sind:

1) die durch den Produktraum E und die Inklusion induzierte Topologie,
2) die des Produktraumes Q, wenn jedes einzelne A_i die induzierte Topologie hat.

Aufgabe 17

Es seien (X_1, d_1), (X_2, d_2) metrische Räume. Auf $X := X_1 \times X_2$ ist durch

$$\mathrm{d} : \begin{cases} X \times X & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \mathrm{d}_1(x_1, y_1) + \mathrm{d}_2(x_2, y_2), \end{cases}$$

wobei $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$, eine Metrik definiert.
Zeigen Sie, dass die von d induzierte Topologie mit der Produkttopologie von X übereinstimmt.

Aufgabe 18

Es seien $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ jeweils mit der Unterraumtopologie versehen. Untersuchen Sie, ob

$$f : \begin{cases} [0, 1[& \rightarrow & S^1 \\ x & \mapsto & (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \end{cases}$$

ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 19

Es seien $A \subset X$ und $B \subset Y$ Teilmengen der topologischen Räume X und Y.
Beweisen Sie die folgenden Identitäten in dem mit der Produkttopologie versehenen Produktraum $X \times Y$:

a) $\overset{\circ}{\widehat{A \times B}} = \mathring{A} \times \mathring{B}$,
b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$,
c) $\mathrm{Rd}(A \times B) = \big(\mathrm{Rd}(A) \times \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \times \mathrm{Rd}(B)\big)$.

Aufgabe 20

$(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ sei eine Familie topologischer Räume.

a) Zeigen Sie, dass die Mengen der Form $\prod_{i \in I} O_i$ mit $O_i \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$ die Basis einer Topologie $\mathcal{O}$ auf $\prod_{i \in I} X_i$ bilden, die sogenannte <u>Box–Topologie</u>.
b) Zeigen Sie, dass die Box–Topologie mit der Produkttopologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ übereinstimmt, falls I endlich ist.
c) Gilt die Aussage von Teil b) auch für beliebige Indexmengen I?