Prof. Dr. G. Rosenberger
Dipl.-Math. T. Camps

Ausgabe: 21.11.2007
Abgabe: 28.11.2007, 12.00 Uhr

Mengentheoretische Topologie

Übungsblatt 6

Aufgabe 21

Gegeben sei eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen. Die Teilmenge $G(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ heißt der Graph von f. Sei $X \times Y$ mit der Produkttopologie und $G(f) \subset X \times Y$ mit der Unterraumtopologie versehen.
Beweisen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn die Abbildung $x \mapsto (x, f(x))$ ein Homöomorphismus von X auf $G(f)$ ist.

Aufgabe 22

Auf $\mathbb{R}^n$ wird durch

$$(x, y) \in R \ :\Leftrightarrow \ x - y \in \mathbb{Z}^n$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Sei $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis.
Zeigen Sie, dass der Quotientenraum $\mathbb{R}^n/_R$ zu dem Produktraum $S^1 \times \ldots \times S^1$ (n Faktoren) homöomorph ist.

Aufgabe 23

Betrachten Sie $X := \mathbb{R}^n \times \{0\}$ und $Y := \mathbb{R}^n \times \{1\}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$.
Eine Abbildung $f : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \{0\} \to Y$ sei definiert durch

$$f(x, 0) := \left(\frac{x}{\|x\|^2}, 1 \right),$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichne. Zeigen Sie, dass $X \cup_f Y$ homöomorph zu S^n ist.

Aufgabe 24

Für $g \geq 1$ sei $E_{4g} \subset \mathbb{R}^2$ das reguläre $4g$–Eck mit den Ecken $z_n = \exp\left(\frac{2\pi i n}{4g}\right)$, wobei $n \in \{1, \ldots, 4g\}$. Auf E_{4g} ist eine Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben, indem die folgenden Randpunkte von E_{4g} als äquivalent erklärt werden:

$$\begin{aligned}(1-t)\, z_{4n-3} + t z_{4n-2} &\sim (1-t)\, z_{4n} + t z_{4n-1} \\ (1-t)\, z_{4n-2} + t z_{4n-1} &\sim (1-t)\, z_{4n+1} + t z_{4n},\end{aligned}$$

wobei $0 \leq t \leq 1$, $n \in \{1, \ldots, g\}$ und $z_{4g+1} := z_1$. Es wird also die erste Kante mit der dritten identifiziert, die zweite mit der vierten usw. Dann ist der Quotientenraum $F_g = E_{4g}/_\sim$ ein CW–Komplex.
Bestimmen Sie die Anzahl der 0–Zellen, 1–Zellen, 2–Zellen usw., aus denen F_g aufgebaut ist.