Prof. Dr. G. Rosenberger
Dipl.-Math. T. Camps

Ausgabe: 28.11.2007
Abgabe: 5.12.2007, 12.00 Uhr

Mengentheoretische Topologie

Übungsblatt 7

Aufgabe 25

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $\mathcal{O}$ eine Topologie auf G. Dann heißt G topologische Gruppe, wenn die Abbildung $G \times G \to G$ mit $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ bzgl. $\mathcal{O}$ stetig ist.

a) Es sei $H \subset G$ eine Untergruppe der topologischen Gruppe G. Zeigen Sie, dass H bzgl. der Unterraumtopologie eine topologische Gruppe ist.

b) Die Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ der invertierbaren $n \times n$–Matrizen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ kann auf natürliche Weise mit einer Teilmenge des $\mathbb{K}^{n^2}$ identifiziert werden. Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ bzgl. der Unterraumtopologie eine topologische Gruppe ist.

c) E sei $O(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die topologische Gruppe der orthogonalen $n \times n$–Matrizen. Ist $O(n)$ offen bzw. abgeschlossen in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$?

Aufgabe 26

Betrachten Sie den $\mathbb{R}^{n^2}$ als die Menge $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ der $n \times n$–Matrizen mit reellen Einträgen. Die Topologie auf $\mathbb{R}^{n^2}$ sei die euklidische Topologie. Weiter seien

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) &:= \{M \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \mid M \text{ invertierbar}\}, \\ \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) &:= \left\{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid M^t = M^{-1}\right\}, \end{aligned}$$

jeweils versehen mit der Unterraumtopologie.
Zeigen Sie:

a) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist offen in $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$.

b) $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ ist abgeschlossen in $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$.

c) $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ ist nicht zusammenhängend.

Aufgabe 27

Es seien X ein topologischer Raum und $A, B \subset X$ abgeschlossen.

a) Beweisen Sie:
Sind $A \cap B$ und $A \cup B$ zusammenhängend, dann auch A und B.

b) Bleibt a) richtig, wenn man für A die Voraussetzung der Abgeschlossenheit fallen lässt?

Aufgabe 28

a) Es sei $f : S^1 \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass es ein $x \in S^1$ gibt mit $f(x) = f(-x)$.

b) Es sei $f : X \to Y$ stetig, surjektiv und offen und Y zusammenhängend.
Zeigen Sie: Ist $f^{-1}(y)$ für jedes $y \in Y$ zusammenhängend, so auch X.