Prof. Dr. G. Rosenberger
Dipl.-Math. T. Camps

Ausgabe: 2.1.2008
Abgabe: 9.1.2008, 12.00 Uhr

Mengentheoretische Topologie

Übungsblatt 10

Aufgabe 37

a) Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum T_4 ist.

b) Zeigen Sie, dass jeder endliche T_1–Raum die diskrete Topologie trägt.

Aufgabe 38

Es sei X eine beliebige Menge. Bestimmen sie die gröbste Topologie, welche die Trennungseigenschaft T_1 besitzt.

Aufgabe 39

Es sei $E := [-1,1] \subset \mathbb{R}$ versehen mit der Unterraumtopologie und $\sim$ sei eine Relation auf E, definiert durch

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm x, & \text{falls } x, y \in \,]-1,1[\\ y = x, & \text{falls } x, y \in \{-1,1\}\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) $E/_{\sim}$ ist ein T_1–Raum.

b) $E/_{\sim}$ ist kein Hausdorffraum.

Aufgabe 40

Es seien X und Y topologische Räume, $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ stetige Abbildungen mit $f \circ g = \mathrm{id}_X$.

a) Zeigen Sie: Ist X hausdorffsch, so auch Y.

b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung der Aussage in Teil a) im allgemeinen nicht gilt, indem Sie geeignete Gegenbeispiele angeben. Nennen Sie solche Gegenbeispiele sowohl für den Fall, dass Y endlich, als auch für den Fall, dass Y unendlich ist.

Aufgabe 41

Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines normalen Raumes X und $f : A \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung mit $\|f(x)\| < 1$ für alle $x \in A$, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass es eine stetige Abbildung $F : X \to \mathbb{R}^n$ gibt mit $F|_A = f$ und $\|F(x)\| < 1$ für alle $x \in X$.
(*Hinweis:* Benutzen Sie den Tietze–Erweiterungssatz und Urysohns Lemma.)