Prof. Dr. G. Rosenberger
Dipl.-Math. T. Camps

Ausgabe: 9.1.2008
Abgabe: 16.1.2008, 12.00 Uhr

Mengentheoretische Topologie

Übungsblatt 11

Aufgabe 42

Es seien $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und X ein kompakter Raum. Zeigen Sie:

a) Ist f bijektiv und Y hausdorffsch, so ist f ein Homöomorphismus.

b) Aus der Mengenlehre ist bekannt, dass es eine bijektive Abbildung $f : S^1 \to D^1$ gibt. Zeigen Sie, dass f nicht stetig sein kann.

Aufgabe 43

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Teilmengen $A \subset X$ und $B \subset X$ seien beide nicht leer. Ist A kompakt und B abgeschlossen, so zeigen Sie, dass

$$\mathrm{d}\,(A, B)) = 0 \;\Leftrightarrow\; A \cap B \neq \emptyset$$

gilt, wobei $\mathrm{d}\,(A, B)) := \inf \{\mathrm{d}\,(a, b) \mid a \in A,\, b \in B\}$.
Bleibt die Aussage richtig, wenn anstelle von "A kompakt" lediglich "A abgeschlossen" vorausgesetzt wird?

Aufgabe 44 (vgl. Aufgabe 21)

Es seien X und Y Hausdorffräume und Y zusätzlich kompakt. Zeigen Sie für $f : X \to Y$:

$$f \text{ stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad G\,(f) \subset X \times Y \text{ abgeschlossen.}$$

Dabei bezeichne $G\,(f)$ den Graphen von f. Gilt die Aussage auch, wenn Y nicht kompakt ist?