Prof. Dr. G. Rosenberger
Dipl.-Math. T. Camps

Ausgabe: 16.1.2008
Abgabe: 23.1.2008, 12.00 Uhr

Mengentheoretische Topologie

Übungsblatt 12

Aufgabe 45

Beweisen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Alexandroff–Kompaktifizierung:
E sei lokalkompakt und hausdorffsch. Man bilde die Menge $E' := E \cup \{\infty\}$, wobei ∞ ein in E nicht vorkommendes Element ist. Dann gibt es auf E' genau eine Topologie, so dass E' kompakt und hausdorffsch ist, und die ursprüngliche Topologie von E mit der von E' induzierten übereinstimmt. Die offenen Mengen von E' sind

1) die offenen Mengen von E,

2) die Komplemente kompakter Mengen von E ($\emptyset$ bei kompakt inbegriffen).

Aufgabe 46

Sei $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ die Menge der natürlichen Zahlen versehen mit der Unterraumtopologie. Zeigen Sie, dass die Einpunkt–Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$ homöomorph zu dem Unterraum $\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ von $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 47

Seien E_1, E_2 lokalkompakte Räume und $E_1' = E_1 \cup \{p_1\}$, $E_2' = E_2 \cup \{p_2\}$ ihre Einpunktkompaktifizierungen mit den Punkten p_1 und p_2. Zeigen Sie, dass sich eine stetige Abbildung $f : E_1 \to E_2$ genau dann durch $f'(p_1) = p_2$ zu einer stetigen Abbildung $f' : E_1' \to E_2'$ fortsetzen lässt, wenn f eigentlich ist, d.h. für jedes kompakte $K \subset E_2$ ist $f^{-1}(K)$ kompakt in E_1.