

Übungen zur Vorlesung Algebra I Blatt 1

Aufgabe 3. Was sind die multiplikativen Inversen von 10, 17 und 18 in \mathbb{Z}_{37} (genauer: im Körper $(\mathbb{Z}_{37}, +_{37}, \cdot_{37})$)?

Aufgabe 4.

- a) Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_{89} \times \mathbb{Z}_{89}$ alle Lösungen (x, y) der Gleichung

$$14 \cdot_{89} x + 5 \cdot_{89} y = 62.$$

(Insbesondere: wie viele Lösungen gibt es?)

- b) Bestimmen Sie in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ alle Lösungen der Kongruenzgleichung

$$14x + 5y \equiv_{23} 62.$$

Aufgabe 5.

- a) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass 9 genau dann k teilt, wenn 9 die Quersumme von k teilt.
(Die Quersumme von k ist bekanntlich die Summe über die Ziffern der Dezimaldarstellung von k .)
- b) Formulieren und beweisen Sie eine ähnliche Regel für die Teilbarkeit durch 11.

Aufgabe 6. Zeigen Sie:

- a) Wenn von zwei isomorphen Gruppen die eine kommutativ ist, dann auch die andere.
- b) Gegeben sei eine Gruppe G und ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x^k = e$ für alle $x \in G$. Dabei ist wie üblich $x^k := x \cdot x \cdots x$ (k -mal). Dann gilt dieses mit dem gleichen k auch für jede isomorphe Gruppe.
- c) Sind die Gruppen $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ und \mathbb{Z}_8 isomorph? (Die Verknüpfung ist hier die Addition.)