# Übungen zur Vorlesung Algebra I
## Blatt 3

**Aufgabe 11.**

a) Ein Element $x$ einer Gruppe habe die Ordnung $rs$.
Bestimmen Sie die Ordnung von $x^r$.

b) Es sei $G$ eine endliche zyklische Gruppe. Zeigen Sie, dass $G$ für jeden Teiler $d$ von $|G|$ eine Untergruppe mit $d$ Elementen besitzt.

**Aufgabe 12.**

a) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe wieder zyklisch ist.
Hinweis: man kann die Aussage auf den Fall der Gruppe $\mathbb{Z}$ zurückführen.

b) Beweisen Sie, dass für gegebenes $d$ die Untergruppe aus Aufgabe 11 b) eindeutig bestimmt ist.
Bemerkung: Für nicht-zyklische Gruppen ist dieses im Allgemeinen falsch.

**Aufgabe 14.** Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nicht isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

**Aufgabe 13.** Wir fixieren ein $m \in \mathbb{N}$ und betrachten die Restklassengruppe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$.

a) Man beweise Folgendes: Eine Restklasse $[a]_m,\ a \in \mathbb{Z}$ erzeugt $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ genau dann, wenn $a$ und $m$ teilerfremd sind.

b)* Man bestimme für allgemeines $[a]_m$ die von $[a]_m$ erzeugte Untergruppe und somit auch die Ordnung von $[a]_m$. (Vergleiche auch Aufgabe 12b.)

**Abgabetermin:** Montag, 28.04.08, bis 10:15 Uhr,
Übungskästen 3 - 5 im Mathematikgebäude