Übungen zur Vorlesung

Analysis II (Lehramt)

Sommersemester 2008

Blatt 5

02.05.2008

Aufgabe 1

Es sei $\alpha > 0$. Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \log(k) \cdot [\log(\log(k))]^{\alpha}}$$

auf Konvergenz!

Aufgabe 2

$f_n, g_n, h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}, \quad g_n(x) := e^{-nx^2}, \quad h_n(x) := \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}.$$

Untersuchen Sie die Funktionenfolgen $(f_n), (g_n), (h_n)$ jeweils auf punktweise und auf gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 3

Eine Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiere gleichmäßig gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiterhin sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass $h_n := g \circ f_n$ *gleichmäßig* gegen ein $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. *Tipp*: Bestimmen Sie dazu zunächst h!

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k \geq 0} \frac{\sin(kx)}{2^k}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine stetig differenzierbare Funktion konvergiert.

b) Auf dem letzten Aufgabenzettel (Blatt 4, Aufgabe 4) haben Sie gezeigt, dass (f_n), definiert durch

$$f_n(x) = \frac{n}{n^2 + x^2},$$

gleichmäßig gegen $f = 0$ auf $\mathbb{R}$ konvergiert. Konvergiert auch

$$\int_0^\infty |f_n(x) - f(x)| dx$$

gegen 0 für $n \to \infty$?

Abgabe am 09.05.2008, 12 Uhr.