technische universität dortmund

Dr. F. Guiaş

Übungen zur Vorlesung

Analysis II (Lehramt)

Sommersemester 2008

Blatt 6

10.05.2008

1. Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

a) $\sum_{k\geq 0}(k^5 \log(k+1)+k^2)x^k$, b) $\sum_{k\geq 0} 3^{k/2}e^{-k}x^k$, c) $\sum_{k\geq 0} a_k(x-a)^{mk}$ für $m \in \mathbb{N}$, wobei die Reihe $\sum_{k\geq 0} a_k(x-a)^k$ den Konvergenzradius $\rho = 2$ habe.

2. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leq \frac{x^4}{24}.$$

Hinweis: Satz von Taylor (Theorem 28.6) mit geeigneter Restglied-Darstellung.

3.
a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $\sum_{k\geq 0}\binom{N+k-1}{k}x^k$. Für x in diesen Konvergenzintervall bezeichne $g(x)$ die Summe der Reihe.

b) Sei $N \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = (1-x)^{-N}$. Zeigen Sie, dass für $x \in (-\rho, \rho)$ $T^0 f(x) = \sum_{k\geq 0}\binom{N+k-1}{k}x^k$ gilt, d.h. die Potenzreihe aus a) ist die Taylor-Reihe von f im Entwicklungspunkt 0.

c) Zeigen Sie dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (-\rho, \rho)$, d.h. die Taylor-Reihe von f in den Entwicklungspunkt 0 konvergiert auf diesem Intervall gegen f.

Hinweis: Leiten Sie $g(x)$ ab und drücken Sie das Ergebnis mithilfe von $g(x)$ aus.

4. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

a) Geben Sie die Taylor-Reihe von f in den Entwicklungspunkt 0 an.
b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $T^0 f(x)$ gegen $f(x)$?

Abgabe am 16.05.2008, 12 Uhr.