technische universität
dortmund

Dr. F. Guiaş

Übungen zur Vorlesung

Analysis II (Lehramt)

Sommersemester 2008

Blatt 9

30.05.08

Aufgabe 1

Es sei (X, d) ein metrischer Raum mit $P \in X$. Weiterhin sei

$$d_P(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ d(x,P) + d(P,y) & x \neq y \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass d_P eine Metrik auf X definiert (die sogenannte Pariser Metrik - überlegen Sie, woher kommt wohl dieser Name?)

b) Man berechne den Abstand $d_P(x,y)$ der Punkte $x = (0,1)$ und $y = (-1,-1)$ in $X = \mathbb{R}^2$ mit $d(x,y) = |x-y|$ und $P = (0,0)$.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= |x_1 + x_2| + |x_3| \\ g(x_1,x_2,x_3) &= |x_1| + |x_2| + |x_3| \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass f *keine* Norm ist!

b) Beweisen Sie, dass g eine Norm auf $\mathbb{R}^3$ definiert (die sogenannte 1-Norm).

c) Wie in b) lässt sich zeigen, dass

$$\|(x_1,x_2)\| = |x_1| + |x_2|$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ darstellt (auch Manhattan-Norm genannt. Können Sie sich einen Grund für diese Namensgebung vorstellen?). Berechnen und skizzieren Sie $K_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 | \, \|x\| = 1\}$!

Aufgabe 3
Untersuchen Sie die folgenden auf $\mathbb{R}^2$ definierten reellen Funktionen auf Stetigkeit!

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ b) $g(x,y) = x \cdot f(x,y)$

c) $h(x,y) = \text{sign}(x+y) \cdot \sin(x^2+y^2)$

wobei

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

partiell und sogar auf *jeder Geraden durch den Nullpunkt* stetig ist! Ist f in $(0,0)$ stetig?

Abgabe am 06.06.08, 12 Uhr.