Übungen zur Vorlesung

Analysis II (Lehramt)

Sommersemester 2008

Blatt 10

07.06.2008

Aufgabe 1.

Bestimmen Sie jeweils (ohne Begründung) $\overline{M}$, M° und ∂M für die folgenden Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^2$.

a) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$,

b) $M := \{(x, \cos\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq \frac{1}{\pi}\}$,

c) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4\}$,

d) $M := \mathbb{Q}^2$.

Aufgabe 2.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen M abgeschlossen oder offen sind und begründen Sie Ihre Angaben. Geben Sie anschließend (ohne Begründung) $\overline{M}$, M° und ∂M an.

a) $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$

Hinweis: Urbild einer stetigen Funktion.

b) $M := \{(x, \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}^2$

Hinweis: über Folgen.

c) $M := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n\}$

Hinweis: der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Aufgabe 3.

Es seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig.

a) Geben Sie eine Menge $M \subseteq X$ mit $f(\overline{M}) \neq \overline{f(M)}$ an.

b) Ist $f(X)$ stets offen oder stets abgeschlossen in Y?

Aufgabe 4.

Es seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn für zwei Folgen $(x_n), (y_n) \subseteq X$ stets gilt:
$d(x_n, y_n) \to 0 \;\Rightarrow\; d(f(x_n), f(y_n)) \to 0$.

Abgabe am 13.06.2008, 12 Uhr.