Übungen zur Vorlesung
Analysis II (Lehramt)
Sommersemester 2008

Blatt 11

13.06.08

Aufgabe 1

Es sei X ein metrischer Raum und $A, B \subset X$ kompakt. Zeigen Sie, dass gilt:

- a) $A \cap B$ ist kompakt.
- b) $A \cup B$ ist kompakt.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass ein metrischer Raum X genau dann kompakt ist, wenn jede unendliche Menge $M \subset X$ (also jede Teilmenge M mit unendlich vielen Elementen) einen Häufungspunkt besitzt.

Aufgabe 3

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Die *Distanz* zweier Mengen $A, B \subset X$ ist definiert durch

$$\text{dist}(A, B) := d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

- a) Erläutern Sie anschaulich den Begriff der Distanz zweier Mengen an einem selbstgewählten Beispiel mit Zeichnung.
- b) Es seien A abgeschlossen und B kompakt und $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, dass A und B einen nicht verschwindenden Abstand haben, d.h. dass gilt: $d(A, B) > 0$.
- c) Finden Sie abgeschlossene, disjunkte Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^2$ mit $d(A, B) = 0$.

Aufgabe 4

Skizzieren Sie die folgenden in Polarkoordinaten angegebenen Wege (mit einem geeigneten Parameter a) und berechnen Sie allgemein ihre euklidischen Längen!

- a) $r = a\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $a > 0$ fest (Archimedische Spirale).
- b) $r = a(1 + \cos(\varphi))$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $a > 0$ fest (Kardioide).