technische universität dortmund

Dr. F. Guiaş

Übungen zur Vorlesung

Analysis II (Lehramt)

Sommersemester 2008

Blatt 13

27.06.08

Aufgabe 1

In der Natur werden viele Phänomene durch Lösungen der Wellengleichung beschrieben, von der Ausbreitung von Wellen auf einer Trommelmembran bis hin zu dem Verhalten von Licht in Glasfaserkabeln. Die Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung und lautet:

$$\Delta_x F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad \text{mit } \Delta_x = \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}^2 \text{ („Laplace-Operator“)},$$

wobei c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen darstellt. Im folgenden sei $r = |x|$, Punkte aus $(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}) \times \mathbb{R}$ seien durch (x,t) bezeichnet. Zeigen Sie, dass die bzgl. der Raumkoordinaten rotationssymmetrische Funktion

$$W : (\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ W(x,t) = \frac{\cos(r - ct)}{r}$$

eine Lösung der Wellengleichung darstellt, dass also gilt $\Delta_x W - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$! *Tipp:* Verwenden Sie die Formel für $\Delta(f \circ r)$ aus der Vorlesung!

Aufgabe 2

Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ total differenzierbar. Zeigen Sie, dass auch $f + g$ und $f \cdot g$ in a total differenzierbar ist. Wie lautet die Produktregel?

Aufgabe 3

Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(D \times (a,b))$ und $\phi, \psi \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ mit $a < \phi(x) \leq \psi(x) < b$ für alle $x \in D$. Zeigen Sie für die Funktion

$$F : D \to \mathbb{R} :\ F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

mit Hilfe der Kettenregel, dass gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)dy + f(x,\psi(x))\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) - f(x,\phi(x))\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x).$$

Hinweis: Es gilt $F(x) = G(x, \phi(x), \psi(x))$ für $G(x,u,v) = \int_u^v f(x,y)dy$.

Aufgabe 4
Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass alle **Richtungsableitungen** im Nullpunkt existieren.
- Gilt die Formel $\partial_v f(0,0) = Df(0,0)v$ für $v \in \mathbb{R}^2, |v| = 1$ (Df bezeichne die Matrix der partiellen Ableitungen)?
- Ist f stetig oder sogar total differenzierbar im Nullpunkt?

Abgabe am 04.07.08, 12 Uhr.