Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

2. Übungsblatt zu Analysis II
SS 2008, 14.4.2008

Aufgabe 5

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \displaystyle\int_{-x^2}^{x^2} \frac{x}{1+e^{2t}}dt$ definiert. Bestimmen Sie die Ableitung von f.

b) Bestimmen Sie $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \exp(t^2)dt}{x^{-1}\exp(x^2)}$.

c) Es sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{-4} \int_0^{x^2} tg(t)dt$.

Aufgabe 6 Auf dem Intervall $I = [0,2]$ seien (f_n) und (g_n) durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & 0 \le x < \frac{1}{n} \\ -n^2x + 2n & \frac{1}{n} \le x < \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \le x \le 2 \end{cases} \text{ und } g_n(x) = \frac{x}{n}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n \in \mathcal{R}[0,2]$ und $g_n \in \mathcal{R}[0,2]$ und fertigen Sie je eine Skizze an.

b) Bestimmen Sie je die Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ und $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Untersuchen Sie die Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^2 f_n(x)dx$ und $\displaystyle\int_0^2 g_n(x)dx$. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 7 Berechnen Sie für $L > 0$ die Länge der Graphen der folgenden Funktionen:

$$\text{a) } f(x) = \cosh x \text{ auf } [0, L] \quad \text{und b)} \quad g(x) = \frac{x^2}{2} \text{ auf } [0,2].$$

Aufgabe 8 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} n^{-1-\alpha} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \text{ für } \alpha > -1 \text{ und b) } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Big(\log(\sqrt[n]{n+k}) - \log(\sqrt[n]{n})\Big).$$

Problem der Woche: Das Wallis-Produkt Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$a_n := \int_0^\pi sin^n(x)dx. \tag{1}$$

Zeigen Sie mit partieller Integration, dass für die Folge (a_n) folgende Rekursionsformel gilt:

$$a_0 = \pi, \quad a_1 = 2 \text{ und } a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_{n-2}. \tag{2}$$

Zeigen Sie jetzt, dass (a_n) monoton fallend ist und dass $a_{2n+1} \leq a_{2n} \leq a_{2n-1}$ gilt sowie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} = 1. \tag{3}$$

Folgern Sie (Wallis-Produkt):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots (2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Abgabe: In den Übungen am 22. April 2008.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss08`