Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

3. Übungsblatt zu Analysis II
SS 2008, 21.4.2008

Aufgabe 9 Es sei f eine auf dem Intervall $[0, \pi]$ stetige Funktion . Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

gilt. Bleibt die Gleichung richtig, falls man $\frac{\pi}{2}$ durch π ersetzt?

Aufgabe 10 Es sei $f \in C^\infty((-1,1))$ mit $f^{(n)}(x) \geq c$ für $c \in \mathbb{R}$ und $x \in (-1,1)$. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

gilt. (`Hinweis:` Betrachten Sie die Hilfsfunktion $g(x) = f(x) - c\exp(x+1)$.)

Aufgabe 11 Beweisen Sie den verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung: Auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ sei f stetig und g Riemann-integrierbar mit $g(x) \geq 0$ f“ur $x \in [a, b]$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Begründen Sie, warum dies eine Verallgemeinerung des Ihnen bekannten Satzes (MWS der Integralrechnung) aus der Vorlesung ist.

Aufgabe 12 Uneigentliche Integrale:

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existieren $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ bzw. $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$. Berechnen Sie im Falle der Existenz das Integral.

b) Entscheiden Sie, welche der folgenden Integrale existieren:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx \text{ und } \int_1^\infty x^n e^{-x}dx \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

Problem der Woche Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx$$

existiere. Weiter seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq a > 0$. Zeigen Sie:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log \frac{b}{a}.$$

`Hinweis:` Im Laufe der Rechnung könnte Aufgabe 11 hilfreich sein.

Abgabe: In den Übungen am 29. April 2008.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss08`