Prof. Dr. Norbert Steinmetz
Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

4. Übungsblatt zu Analysis II
SS 2008, 28.4.2008

Aufgabe 13 Für welche α konvergiert

$$\sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{(k\log k)(\log\log k)^{\alpha}}?$$

Aufgabe 14 Für $0 < \alpha < 1$ sei

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha}} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert.

Aufgabe 15 Es sei $f \in C[0,1]$. Wir definieren

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\} \text{ und } \|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|dx$$

a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ zwei Normen auf $C[0,1]$ sind.

b) Zeigen Sie, dass für $f \in C[0,1]$ stets $\|f\|_1 \le \|f\|_\infty$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass es kein $C > 0$ geben kann, so dass für alle $f \in C[0,1]$ die Ungleichung $\|f\|_\infty \le C\|f\|_1$ gilt.

d) Zeigen Sie, dass $(f_n) \subset C[0,1]$ genau dann gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ gilt, für $(n \to \infty)$.

e) Ist $\|\cdot\|$ auf $R[0,1]$ eine Norm?

Problem der Woche (Flächeninhalt der Gaussglocke) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Anleitung: Zeigen Sie, dass für $t \in \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt$$

eine differenzierbare Funktion F erklärt wird, mit

$$F'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du.$$

Folgern Sie (Hinweis: linke Seite nach x ableiten!)

$$\left(\int_0^x e^{-u^2} du \right)^2 = \frac{\pi}{4} - F(x)$$

Zeigen Sie nun

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^x e^{-u2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Abgabe: In den Übungen am 6. Mai 2008.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss08`