Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

6. Übungsblatt zu Analysis II
SS 2008, 12.4.2008

Aufgabe 20 Für $f : I \to \mathbb{R}$ (I ein Intervall) sei der Graph G von f durch

$$G := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \in I\}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass $G \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist, falls f stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass $G \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, falls f stetig und I kompakt ist.

c) Finden Sie eine Funktion f und ein Intervall I, so dass G nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 21 Für $f \in C^1[0,1]$ ist die C^1-Norm durch

$$\|f\|_{C^1} = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass durch $\|\cdot\|_{C^1}$ eine Norm auf $C^1[0,1]$ definiert wird.

b) Zeigen Sie, dass eine Folge $(f_n) \subset C^1[0,1]$ existiert, die gleichmäßig gegen ein $f \notin C^1[0,1]$ konvergiert. Ist $C^1[0,1]$ versehen mit $\|\cdot\|_\infty$ vollständig?

c) Zeigen Sie, dass $C^1[0,1]$ mit $\|\cdot\|_{C^1}$ ein vollständiger und normierter Raum ist.

Aufgabe 22 Für $f \in C[0,1]$ sei die Abbildung $T : C[0,1] \to C[0,1]$ durch

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

definiert. Weiter sei $E = \{f \in C[0,1] \, : \, \|f\|_\infty < 1\}$ die offene Einheitskugel in $C[0,1]$. Zeigen Sie, dass $T(E) \subset E$ gilt und die Gleichung $Tf = f$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 23 Untersuchen Sie, ob für die nachfolgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existieren. Welche dieser Funktionen kann man in $(0,0)$ stetig ergänzen?

$$\text{a)} f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+(x-y)^2} \qquad \text{b)} f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \text{c)} f(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

Abgabe: In den Übungen am 20. Mai 2008.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss08`