Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

7. Übungsblatt zu Analysis II
SS 2008, 19.5.2008

Aufgabe 24 Es seien A, B nichtleere, abgeschlossene und disjunkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) Es existieren A, B mit $\operatorname{dist}(A, B) = 0$.

b) Ist A kompakt, so existierten $a \in A$ und $b \in B$ mit $\operatorname{dist}(A, B) = |a - b| > 0$.

c) Ist A kompakt, so existeren $x, y \in A$ mit $|x - y| = \operatorname{diam} A$.

Aufgabe 25 Welche der folgenden Mengen sind offen, welche sind abgeschlossen, welche kompakt? Beweisen Sie ihr Ergebnis!

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{x^2 - yz} \geq 1 \text{ und } \cos(x + y) \leq 0\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x|_1 \neq 2 \text{ und } |x|_\infty \neq 1\}$ (Skizze)

c) $\{(x + \sin z, \sqrt{\cosh(x + y)}) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 0, 1 \leq z \leq 2\}$

Aufgabe 26

a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

i) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x(e^y - 1)}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ii) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{y} & , y \neq 0 \\ x & , y = 0 \end{cases}$

b) Für welche $\alpha > 0$ lässt sich $g(x) = \dfrac{x_1 x_2 \ldots x_n}{|x|^\alpha}$ mit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ in 0 stetig fortsetzen?

Aufgabe 27 Wie ist $f(x, 0)$ für $x \in \mathbb{R}$ bzw. $f(0, y)$ für $y \in \mathbb{R}$ zu definieren, damit

$$f(x, y) = \frac{\cos xy - 1}{x^3 y^2} \sin x, \qquad xy \neq 0,$$

sich zu einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fortsetzen läßt?

Abgabe: In den Übungen am 27. Mai 2008.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss08`