Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

8. Übungsblatt zu Analysis II
SS 2008, 27.5.2008

Aufgabe 28 Es seien (vergleiche Aufgabe 17 c)) M_1 und M_2 Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ mit

$$M_1 = \{r(\varphi)(\cos\varphi, \sin\varphi) : r(\varphi) = \frac{\varphi}{1+\varphi}, \varphi \geq 0\} \text{ und } M_2 = \{(x, \sin\frac{1}{x}), 0 < x \leq 1\}.$$

a) Zeigen Sie, dass M_1 und M_2 wegzusammenhängende Mengen sind.

b) Zeigen Sie, dass $\overline{M_1} = M_1 \cup \{(x,y) : |(x,y)| = 1\}$ und $\overline{M_2} = M_2 \cup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$ gilt. Fertigen Sie jeweils eine Skizze an.

c) Zeigen Sie, dass weder $\overline{M_1}$ noch $\overline{M_2}$ wegzusammenhängend sind.

Aufgabe 29 Für $L > 0$ sei

$$X := \{f \in C[0,1] : f(0) = 0 \text{ und } f \text{ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante } L\}.$$

Zeigen Sie, dass X beschränkt und gleichgradig stetig (bezüglich $\|\cdot\|_\infty$) ist.

Aufgabe 30 Es sei $E = \{f \in C[0,1] : \|f\|_\infty \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel in $C[0,1]$. Zeigen Sie, dass E nicht kompakt ist.

Aufgabe 31 Es sei $X := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ stetig und 1-periodisch}\}$ (das heißt, es gilt $f(x+1) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Zeigen Sie, dass X mit $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum ist.

Problem der Woche Für eine auf $I = (0,\infty)$ stetige Funktion f sei $\|\cdot\|$ durch

$$\|f\| = \sup\{|f(x)e^{-x}| : x \in (0,\infty)\}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $E = \{f \in C(0,\infty) : \|f\| < \infty\}$ mit $\|\cdot\|$ ein Banachraum ist.

Abgabe: In den Übungen am 3. Juni 2008.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss08`