Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

12. Übungsblatt zu Analysis II
SS 2008, 24.6.2008

Aufgabe 44 Gegeben Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x^3 - y^3 + z^3 + 2z^2 - 3xyz$.

a) Zeigen Sie, dass in einer Umgebung von $(1, -1)$ eine Funktion g existiert mit $g(1, -1) = -1$ und $f(x, y, g(x, y)) = 0$.

b) Zeigen Sie, dass g in $(-1, 1)$ ein lokales Extremum besitzt.

c) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom um $(1, -1)$ von g.

Aufgabe 45 Zeigen Sie, dass durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2uv \\ x^3 + y^3 &= v^3 - u^3 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(-1, 1)$ eine Funktion g mit $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ und $g(-1, 1) = (1, 1)$ implizit definiert wird. Berechnen Sie die Jacobimatrix von g in $(-1, 1)$.

Aufgabe 46 Es seien $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2\pi\}$ und $f : D \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \sinh x \cos y \\ \cosh x \sin y \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Punkte aus D, in denen f lokal injektiv ist.

b) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $f(0, \frac{\pi}{6}) = (0, \frac{1}{2})$

Aufgabe 47 Für $a = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sei $P_a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ ein reelles Polynom.

a) Es sei $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$. Zeigen Sie, dass für ein $\delta > 0$ eine stetig differenzierbare Funktion $x : K(a, \delta) \to \mathbb{R}$ existiert mit $P_b(x(b)) = 0$. Interpretieren Sie das Ergebnis x?

b) Zeigen Sie, dass die Funktion x folgende Darstellung hat:

$$x(b) = -\frac{b_0}{a_1} + O(|b - a|^2) \quad \text{für } b \to a$$

.

Abgabe: In den Übungen am 1. Juli 2008.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss08`