Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

13. Übungsblatt zu Analysis II
SS 2008, 1.7.2008

Aufgabe 48 Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta)$$

definiert. Bestimmen Sie alle Punkte $(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ in denen Φ lokal umkehrbar ist?

Aufgabe 49 Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y, z) = xyz$ und die Menge K durch

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 5,\ xy + xz + yz = 8\}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass f auf K Minimum und Maximum besitzt.

b) Berechnen Sie alle Punkte in K, in denen f Minimum bzw. Maximum annimmt.

Aufgabe 50 Zeigen Sie für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x, y, z \geq 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

Aufgabe 51 Es seien $p, q > 1$ mit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ und $f(x, y) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$ für $x, y > 0$. Zeigen Sie:

a) Unter der Nebenbedingung $xy = 1$ besitzt f genau in $(1, 1)$ ein globales Minimum.

b) Für $u, v > 0$ gilt $uv \leq \dfrac{1}{p}u^p + \dfrac{1}{q}v^q$.

c) Sind $a_j, b_j > 0$ für $j = 1, \ldots, n$ so gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(Höldersche Ungleichung)}$$

.

Problem der Woche Es sei $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ mit $a, b, c > 0$. Betrachten Sie alle Ebenen die den Punkt p enthalten und welche mit den Koordinatenebenen im ersten Oktanden einen Tetraeder einschließen. Bestimmen Sie die Ebene E, die das Volumen des Tetraeders minimiert.

Abgabe: In den Übungen am 8. Juli 2008.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss08`