

Musterlösung zu Blatt 1

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sommersemester 2008

1 Da auf $\mathbb{K}^n$ alle Normen äquivalent sind, lässt sich zum Beispiel die Maximumsnorm

$$\|x\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

als Norm auf $\mathbb{K}^n$ wählen (und auf $\mathbb{K}$ der Betrag). Es sei $x_0 \in D$ beliebig.

Ist dann $U \subseteq D$ eine Umgebung von x_0 und $f : U \rightarrow \mathbb{K}^n$ Lipschitz-stetig, so existiert ein $L > 0$, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$$

für alle $x, y \in U$ gilt. Es folgt unmittelbar, dass

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq L \|x - y\|$$

für alle $x, y \in U$ gilt, d.h. f_j ist Lipschitz-stetig auf U für $j = 1, \dots, n$.

Ist umgekehrt $U_j \subseteq \mathbb{K}^n$ Umgebung von x_0 und $f_j : U_j \rightarrow \mathbb{K}$ Lipschitz-stetig für $j = 1, \dots, n$, so existieren $L_1, \dots, L_n > 0$, so dass

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq L_j \|x - y\|$$

für alle $x, y \in U_j$, $j = 1, \dots, n$, gilt. Mit $L := \max\{L_1, \dots, L_n\} > 0$ folgt dann

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$$

für alle $x, y \in U := \bigcap_{j=1}^n U_j$, d.h. f ist Lipschitz-stetig auf der Umgebung U von x_0 .

2 Es ist

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(t, X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\omega^2 \sin x_0 - 2\rho x_1 \end{pmatrix}$$

Da die partiellen Ableitungen

$$\partial_{x_0} F(t, X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 \cos x_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_{x_1} F(t, X) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\rho \end{pmatrix}$$

stetig sind, ist F nach Feststellung 1.5 lokal Lipschitz-stetig bezüglich X .

Bemerkung: Da die partiellen Ableitungen auf ganz $\mathbb{C}^2$ beschränkt sind, ist F sogar global Lipschitz-stetig bezüglich X .

3 a) Die Picard-Iteration

$$u_{k+1}(z) = v + \int_{[0,z]} Au_k(\zeta) d\zeta = v + \int_0^1 Au_k(tz) z dt$$

für $k \in \mathbb{N}_0$ mit Startwert $u_0(z) = u(0) = v$ liefert sukzessive

$$u_1(z) = v + \int_0^1 Avz dt = v + Avz$$

$$u_2(z) = v + \int_0^1 A(v + Avtz)z dt = v + Avz + A^2v \frac{z^2}{2}$$

$$u_3(z) = \dots = v + Avz + A^2v \frac{z^2}{2} + A^3v \frac{z^3}{2 \cdot 3}$$

und insgesamt die Lösung

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} A^k v = e^{Az} v$$

(wie mittels vollständiger Induktion bewiesen werden kann).

b) Der Potenzreihenansatz

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{C}^n \text{ für } k \in \mathbb{N}_0$$

mit

$$\frac{du}{dz} = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} z^k$$

ergibt beim Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} A c_k z^k$$

und durch Koeffizientenvergleich die Rekursionsformel

$$c_{k+1} = \frac{A c_k}{k+1} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

mit $c_0 = u(0) = v$. Sukzessives Einsetzen führt auf die explizite Formel

$$c_k = \frac{A^k v}{k!} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

(die wiederum mittels vollständiger Induktion bewiesen werden kann) und somit auf dieselbe Lösung wie in Teil a).

Wegen $\|A^k v\| \leq \|A\|^k \cdot \|v\|$ konvergiert die Potenzreihe auf ganz $\mathbb{C}$ absolut und lokal gleichmäßig (vgl. 69.12, Analysis III). Mit dem Satz von Weierstraß folgt, dass u eine ganze Funktion ist.

4 a) i) $s(t) = \frac{\alpha}{1+t}$

Nach Formel (12) von Kapitel 2 gilt:

$$P(t) = 1 - e^{-\alpha \log(1+t)} = 1 - \frac{1}{(1+t)^\alpha}$$

Bezeichnet T die Halbwertszeit, so folgt mit (14):

$$\alpha \log(1+T) = \log 2 \quad \Leftrightarrow \quad T = 2^{\frac{1}{\alpha}} - 1$$

Für die Lebenserwartung folgt mit (15):

$$E = \int_0^\infty \frac{\alpha t}{1+t} e^{-\alpha \log(1+t)} dt = \alpha \int_0^\infty \frac{t}{(1+t)^{\alpha+1}} dt$$

Ist $\alpha = 1$, so folgt:

$$E = \int_0^\infty \frac{t+1-1}{(1+t)^2} dt = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt = \left[\log(1+t) + \frac{1}{1+t} \right]_0^\infty = \infty$$

Wegen der Monotonie von $\alpha \mapsto \frac{t}{(1+t)^{\alpha+1}}$ folgt damit auch für $\alpha \leq 1$ sofort $E = \infty$, d.h. Unsterblichkeit.

Ist nun $\alpha > 1$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} E &= \alpha \int_0^\infty \frac{t+1-1}{(1+t)^{\alpha+1}} dt = \alpha \int_0^\infty \left(\frac{1}{(1+t)^\alpha} - \frac{1}{(1+t)^{\alpha+1}} \right) dt \\ &= \alpha \left[\frac{(1+t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(1+t)^{-\alpha}}{-\alpha} \right]_0^\infty = \alpha \left(\frac{1}{-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) \\ &= \alpha \frac{1}{-\alpha(1-\alpha)} = \frac{1}{\alpha-1} \end{aligned}$$

ii) $s(t) = \alpha e^{\beta t}$

Nach Formel (12) von Kapitel 2 gilt:

$$P(t) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta t}-1)} = 1 - e^{\frac{\alpha}{\beta}(1-e^{\beta t})}$$

Bezeichnet T die Halbwertszeit, so folgt mit (14):

$$\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta T}-1) = \log 2 \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{1}{\beta} \log \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \log 2 \right)$$

Für die Lebenserwartung folgt mit (15):

$$E = \int_0^\infty \alpha t e^{\beta t} e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta t}-1)} dt = \int_0^\infty \alpha t e^{\beta t + \frac{\alpha}{\beta}(1-e^{\beta t})} dt$$

Es gilt:

$$\frac{d}{dt} e^{\frac{\alpha}{\beta}(1-e^{\beta t})} = -\alpha e^{\beta t + \frac{\alpha}{\beta}(1-e^{\beta t})} \quad (\text{Nachrechnen!})$$

Mittels partieller Integration ergibt sich dann:

$$E = -t e^{\frac{\alpha}{\beta}(1-e^{\beta t})} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{\frac{\alpha}{\beta}(1-e^{\beta t})} dt = \int_0^\infty e^{\frac{\alpha}{\beta}(1-e^{\beta t})} dt$$

Das verbleibende Integral lässt sich nicht elementar berechnen. Eine Lösung kann zum Beispiel mit einem Potenzreihenansatz approximiert werden.

b) Es ist

$$P_{t_0}(t) = \frac{P(t+t_0) - P(t_0)}{1 - P(t_0)}$$

für $t \geq 0$ (falls $P(t_0) < 1$, sonst ist sowieso nichts zu untersuchen). Mit

$$\dot{P}_{t_0}(t) = \frac{\dot{P}(t+t_0)}{1 - P(t_0)}$$

folgt:

$$E_{t_0} = \int_0^\infty t \dot{P}_{t_0}(t) dt = \frac{1}{1 - P(t_0)} \int_0^\infty t \dot{P}(t+t_0) dt$$

Forme zunächst das Integral um:

$$\int_0^\infty t \dot{P}(t+t_0) dt = \int_{t_0}^\infty (t-t_0) \dot{P}(t) dt = \int_{t_0}^\infty t \dot{P}(t) dt - \int_{t_0}^\infty t_0 \dot{P}(t) dt$$

Für den 1. Summanden gilt:

$$\int_{t_0}^\infty t \dot{P}(t) dt = \int_0^\infty t \dot{P}(t) dt - \int_0^{t_0} t \dot{P}(t) dt = E - \int_0^{t_0} t \dot{P}(t) dt$$

Für den 2. Summanden gilt:

$$\int_{t_0}^\infty t_0 \dot{P}(t) dt = t_0 P(t) \Big|_{t_0}^\infty = t_0 (P(\infty) - P(t_0)) \quad \text{mit } P(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$$

Insgesamt ergibt sich daraus:

$$E_{t_0} = \frac{E}{1 - P(t_0)} - \frac{t_0 (P(\infty) - P(t_0))}{1 - P(t_0)} - \frac{1}{1 - P(t_0)} \int_0^{t_0} t \dot{P}(t) dt$$

Ist $P(\infty) = 1$, so vereinfacht sich die Formel:

$$E_{t_0} = \frac{E}{1 - P(t_0)} - t_0 - \frac{1}{1 - P(t_0)} \int_0^{t_0} t \dot{P}(t) dt$$

SAWO