Musterlösung zu Blatt 2

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sommersemester 2008

5 Durch

$$\dot{h}(t) = -\beta(h(t) - A(t)) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{h}(t) = -\beta h(t) + \beta(A_0 - \gamma t)$$

ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung gegeben. Die allgemeine Lösung lässt sich mit Hilfe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung beschreiben.

Bestimme zunächst die allgemeine Lösung $h_0(t)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Allgemein hat eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) = a(t) \cdot x(t)$$

die Lösung $x(t) = Ce^{A(t)}$ mit $C \in \mathbb{R}$ und einer Stammfunktion A von a . Bei der vorliegenden homogenen Differentialgleichung ist

$$h_0(t) = Ce^{-\beta t}$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

Eine spezielle Lösung $x_s(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$$

ergibt sich durch Variation der Konstanten:

$$x_s(t) = C(t)e^{A(t)} \quad \text{mit} \quad \dot{C}(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

Bei der vorliegenden inhomogenen Differentialgleichung ist

$$\dot{C}(t) = \beta(A_0 - \gamma t)e^{\beta t}, \text{ d.h. } C(t) = \left(A_0 - \gamma t + \frac{\gamma}{\beta}\right)e^{\beta t}$$

und somit:

$$h_s(t) = A_0 - \gamma t + \frac{\gamma}{\beta}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist schließlich die Summe $h_0 + h_s$, also:

$$h(t) = A_0 - \gamma t + \frac{\gamma}{\beta} + Ce^{-\beta t}$$

Für den Anfangswert $h(0) = h_0$ ergibt sich:

$$h_0 = A_0 + \frac{\gamma}{\beta} + C \quad \Leftrightarrow \quad C = h_0 - A_0 - \frac{\gamma}{\beta}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet also

$$h(t) = A(t) + \alpha + (h_0 - A_0 - \alpha)e^{-\beta t}$$

mit $\alpha := \frac{\gamma}{\beta}$.

6 Nach 2.11 löst $x = x(t) > 0$ das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = W(x)x, \quad x(0) = x_0 > 0.$$

a) Einsetzen der gegebenen Wachstumsrate ergibt die Bernoulli-Differentialgleichung

$$\dot{x} = ax - bx^3$$

mit $\alpha = 3$. Diese lässt sich nach 2.14 durch die Substitution $y := x^{-2}$ in die lineare Differentialgleichung

$$\dot{y} = -2ay + 2b$$

überführen. Deren Lösungen können wie in Aufgabe 5 bestimmt werden. Die homogene lineare Differentialgleichung besitzt die allgemeine Lösung

$$y_0(t) = Ce^{-2at}$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich durch Variation der Konstanten.

$$\dot{C}(t) = 2be^{2at}, \quad \text{also } C(t) = \frac{b}{a}e^{2at}$$

liefert:

$$y_s(t) = \frac{b}{a}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet somit:

$$y(t) = \frac{b}{a} + Ce^{-2at}$$

Durch Rücksubstitution ergibt sich wegen $x > 0$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a} + Ce^{-2at}}}$$

mit $C \in \mathbb{R}$ als allgemeine Lösung der Bernoulli-Differentialgleichung. Für die Lösung des Anfangswertproblems kann C durch Einsetzen der Anfangsbedingung bestimmt werden:

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a} + C}} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{x_0^2} - \frac{b}{a}$$

Also:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{b}{a}\right)e^{-2at}}}$$

Offensichtlich gilt $x(t) \rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}}$ für $t \rightarrow \infty$. Für $C = 0$, d.h. $x_0 = \sqrt{\frac{a}{b}}$, ergibt sich die stationäre Lösung $x(t) = x_0$. Ist $C > 0$, so ist x monoton wachsend, und ist $C < 0$, so ist x monoton fallend.

Untersuche nun die notwendige Bedingung $\ddot{x}(t) = 0$ für die Existenz von Wendepunkten. Unter Verwendung der Differentialgleichung berechnet sich

$$\ddot{x} = a\dot{x} - 3bx^2 \cdot \dot{x} = \dot{x}(a - 3bx^2) = (ax - bx^3)(a - 3bx^2)$$

und mit $x > 0$ folgt:

$$\ddot{x}(t) = 0 \Leftrightarrow x(t) = \sqrt{\frac{a}{b}} = x_0 \quad \text{oder} \quad x(t) = \sqrt{\frac{a}{3b}}$$

Die erste kritische Stelle tritt nur im Fall der stationären Lösung auf. Für die zweite kritische Stelle ergibt sich:

$$\frac{a}{3b} = \frac{1}{\frac{b}{a} + Ce^{-2at}} \Leftrightarrow \frac{2b}{a} = Ce^{-2at}$$

Die Gleichung lässt sich nur lösen, falls $C > 0$ ist, und weitere Umformungen ergeben schließlich:

$$t = \frac{1}{2a} \log \frac{aC}{2b} =: t_0$$

Da $\ddot{x}$ an der einzigen kritischen Stelle t_0 einen Vorzeichenwechsel hat, liegt dort eine Wendestelle vor. Es ist zu beachten, dass $t_0 \geq 0$ nur gilt, falls $\frac{aC}{2b} \geq 1$ ist.

b) Einsetzen der gegebenen Wachstumsrate ergibt die Differentialgleichung

$$\dot{x} = ae^{-bt}x$$

mit getrennten Variablen. Nach Satz 2.4 lässt sich die Lösung des Anfangswertproblems (unter Berücksichtigung von $x_0 > 0$) wie folgt finden.

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\xi} = \int_0^t ae^{-b\tau} d\tau \Leftrightarrow \log x - \log x_0 = -\frac{a}{b}e^{-bt} + \frac{a}{b}$$

Daraus ergibt sich die Lösung

$$x(t) = x_0 e^{\frac{a}{b}(1-e^{-bt})}.$$

Die Funktion ist monoton wachsend, und es gilt $x(t) \rightarrow x_0 e^{\frac{a}{b}}$ für $t \rightarrow \infty$.

Untersuche nun die notwendige Bedingung $\ddot{x}(t) = 0$ für die Existenz von Wendepunkten. Unter Verwendung der Differentialgleichung berechnet sich

$$\ddot{x} = -abe^{-bt}x + ae^{-bt}\dot{x} = -abe^{-bt}x + (ae^{-bt})^2x = ae^{-bt}x(ae^{-bt} - b)$$

und mit $x > 0$ folgt:

$$\ddot{x}(t) = 0 \Leftrightarrow ae^{-bt} = b \Leftrightarrow t = \frac{1}{b} \log \frac{a}{b} =: t_0$$

Da $\ddot{x}$ an der einzigen kritischen Stelle t_0 einen Vorzeichenwechsel hat, liegt dort eine Wendestelle vor. Es ist zu beachten, dass $t_0 \geq 0$ nur gilt, falls $a \geq b$ ist.

7 Einsetzen von φ in die Differentialgleichung ergibt:

$$a + 3a - 4a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - a + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$\varphi(t) = \frac{t}{2}$ ist also eine spezielle Lösung der Riccati-Differentialgleichung. Nach 2.15 ergibt sich die allgemeine Lösung aus der Bernoulli-Differentialgleichung

$$\dot{u} + \left(\frac{3}{t} - \frac{8}{t^2} \cdot \frac{t}{2}\right)u - \frac{4}{t^2}u^2 = 0 \Leftrightarrow \dot{u} = \frac{1}{t}u + \frac{4}{t^2}u^2$$

mit $u(t) := x(t) - \varphi(t)$. Die Bernoulli-Differentialgleichung mit $\alpha = 2$ lässt sich nach 2.14 durch $y := \frac{1}{u}$ in die lineare Differentialgleichung

$$\dot{y} = -\frac{1}{t}y - \frac{4}{t^2}$$

überführen. Deren Lösungen können wie in Aufgabe 5 bestimmt werden. Die homogene lineare Differentialgleichung besitzt die allgemeine Lösung

$$y_0(t) = \frac{C}{t}$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich durch Variation der Konstanten.

$$\dot{C}(t) = -\frac{4}{t}, \text{ also } C(t) = -4 \log |t|$$

liefert:

$$y_s(t) = -\frac{4}{t} \log |t|$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet somit:

$$y(t) = \frac{C}{t} - \frac{4}{t} \log |t|$$

Durch Rücksubstitution ergibt sich

$$u(t) = \frac{1}{\frac{C}{t} - \frac{4}{t} \log |t|} = \frac{t}{C - 4 \log |t|}$$

und schließlich

$$x(t) = \frac{t}{C - 4 \log |t|} + \frac{t}{2}$$

mit $C \in \mathbb{R}$ als allgemeine Lösung der Riccati-Differentialgleichung (auf geeigneten Intervallen).

8 Wie in Beispiel 2.16 ergibt sich mit dem Potenzreihenansatz $a_0 = x(0) = 1$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} = t - \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k - \sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{j=0}^k a_j a_{k-j}.$$

Indexverschiebung bei der Reihe auf der linken Seite der Gleichung und Koeffizientenvergleich liefert die Rekursionsformel

$$(k+1)a_{k+1} = \delta_{k1} - a_k - \sum_{j=0}^k a_j a_{k-j}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Einsetzen liefert schrittweise $a_1 = -2$, $a_2 = \frac{7}{2}$ und $a_3 = -\frac{29}{6}$.

sawo