Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fakultät für Mathematik
TU Dortmund

3. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ Sommersemester 2008

Abgabetermin: Mittwoch, 30.4.08, bis 10.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 9: Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} \;=\; \frac{(2t+x-3)^2}{(2t+4)^2}\;,\; x(-1) \;=\; 7$$

auf einem geeigneten Intervall.

Aufgabe 10: Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\dot{x} \;=\; \frac{3t^2}{x-t^2+1} + 2t$$

über $\Omega := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x > t^2 - 1\}$. Bestimmen Sie deren maximale Lösungen mit Hilfe der Substitution $u := x - t^2 + 1$.

Aufgabe 11: Konstruieren Sie wie folgt eine „Zackenfunktion“ $Z : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, die beschränkt und lokal Lipschitz-stetig, aber nicht global Lipschitz-stetig ist. Der Funktionsgraph bestehe aus Dreiecken mit Eckpunkten $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, 0\right)$, $\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}, 0\right)$, $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+2}, 1\right)$ für $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine explizite Funktionsvorschrift für Z an und weisen Sie nach, dass Z die geforderten Eigenschaften besitzt. Gibt es auch eine differenzierbare Funktion mit den genannten Eigenschaften ?

Aufgabe 12: Berechnen Sie jeweils ein erstes Integral des Differentialgleichungssystems

$$(\dot{x}, \dot{y})^T \;=\; v(x,y)$$

auf $\mathbb{R}^2$ mit v gegeben durch:

a) $v(x,y) := (2y^2, x^2y)^T$

b) $v(x,y) := (y^3 + yx^2, x^3 + xy^2)^T$

Hinweis zu b): Verwenden Sie den Ansatz $h = h(x^2 + y^2)$.