Musterlösung zu Blatt 3

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sommersemester 2008

9 Die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \frac{(2t+x-3)^2}{(2t+4)^2}$$

lässt sich mit der Transformation von 2.13 c) in eine homogene Differentialgleichung umformen. Das zugehörige lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2t + x &= 3 \\ 2t &= -4 \end{aligned}$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung $t_0 = -2$, $x_0 = 7$, und mit $\tau := t+2$, $\xi := x-7$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi}{\tau}\right)^2.$$

Nach 2.13 b) lässt sich die homogene Differentialgleichung mit der Substitution $u(\tau) := \frac{\xi(\tau)}{\tau}$ in

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{u^2}{4}\right)$$

transformieren. Die Lösungen dieser Differentialgleichung mit getrennten Variablen ergeben sich aus

$$\int \frac{du}{1 + \left(\frac{u}{2}\right)^2} = \int \frac{d\tau}{\tau} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \arctan \frac{u}{2} = \log|\tau| + \widetilde{C}$$

als

$$u(\tau) = 2 \tan\left(\log\sqrt{|\tau|} + C\right)$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Rücksubstitution ergibt schließlich:

$$x(t) = 2(t+2)\tan\left(\log\sqrt{|t+2|} + C\right) + 7$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $x(-1) = 7$ liefert

$$\tan C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = k\pi$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Die Funktionswerte sind für alle $k \in \mathbb{Z}$ identisch. Wähle also $C = 0$. Dann lautet die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$x(t) = 2(t+2)\tan\left(\log\sqrt{t+2}\right) + 7$$

auf dem (maximalen) Definitionsintervall $(e^{-\pi} - 2, e^{\pi} - 2)$ um $t = -1$.

10 Die Differentialgleichung

$$\dot{x} \;=\; \frac{3t^2}{x - t^2 + 1} + 2t$$

lässt sich mit der Substitution $u := x - t^2 + 1$ in die Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt} \;=\; \frac{3t^2}{u}$$

mit getrennten Variablen überführen. Deren Lösungen ergeben sich aus

$$\int u\,du \;=\; \int 3t^2\,dt \quad\Leftrightarrow\quad \frac{u^2}{2} \;=\; t^3 + \widetilde{C}$$

wegen $u > 0$ als

$$u(t) \;=\; \sqrt{2t^3 + C}$$

und nach Rücksubstitution

$$x(t) \;=\; \sqrt{2t^3 + C} + t^2 - 1$$

mit $C \in \mathbb{R}$ für $t > \sqrt[3]{-\frac{C}{2}}$.

Bemerkung: Ω ist eine Fläche, die von der Parabel $t \mapsto t^2 - 1$ berandet wird. Die Graphen der Lösungen der Differentialgleichung laufen in Ω „von Rand zu Rand“: es gilt $x(t) \to t^2 - 1$ für $t \to \sqrt[3]{-\frac{C}{2}}$ und $x(t) \to \infty$ für $t \to \infty$.

11 Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$x_1^{(n)} \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,, \quad x_2^{(n)} \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+2}\,, \quad x_3^{(n)} \;:=\; \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

und $I^{(n)} := \left[x_1^{(n)}, x_3^{(n)}\right)$. Definiere die Funktion $Z^{(n)} : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$Z^{(n)}(x) \;:=\; 1 - (2n+2)\left|x - x_2^{(n)}\right| \cdot 1_{I^{(n)}}(x)$$

für $x \in [1, \infty)$ und

$$Z \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty} Z^{(n)}\,.$$

Z ist nach Konstruktion beschränkt und wegen

$$\lim_{x \to x_3^{(n)}-} Z(x) \;=\; 0 \;=\; Z(x_3^{(n)})$$

stetig. Z ist auch lokal Lipschitz-stetig, denn für $x, y \in I^{(n)}$ gilt

$$|Z(x) - Z(y)| \;\leq\; \frac{1}{2n+2}\,|x - y|$$

und sogar Gleichheit, falls $x, y \in \left[x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right]$ oder $x, y \in \left[x_2^{(n)}, x_3^{(n)}\right)$ ist. Die Ungleichung ist offensichtlich auch für $x, y \in \left[1, x_3^{(n)}\right)$ erfüllt.

Z ist nicht global Lipschitz-stetig, denn wegen der erwähnten Gleichheit auf bestimmten Intervallen müsste eine Lipschitz-Konstante $L > 0$, für die

$$|Z(x) - Z(y)| \ \leq \ L \cdot |x - y|$$

für alle $x \in [1, \infty)$ richtig ist,

$$L \ \leq \ \frac{1}{2n+2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen, was nicht möglich ist.

Abrunden der Ecken in der angegebenen Konstruktion liefert ein differenzierbares Beispiel. Es lassen sich aber auch explizite differenzierbare Funktionen mit den geforderten Eigenschaften finden, zum Beispiel $\sin(e^x)$. Auch die Funktion $\sin(x^2)$ ist ein Beispiel. Sie taucht in Aufgabe 13 wieder auf!

12 a) Definiere $w(x, y) := (x^2 y, -2y^2)^T$. Dann ist w orthogonal zu v, und falls ein Potential zu w existiert, so ist dieses ein erstes Integral des Systems $(\dot{x}, \dot{y})^T = v(x, y)$. Wegen

$$\partial_y w_1(x, y) \ = \ x^2 \ \neq \ 0 \ = \ \partial_x w_2(x, y)$$

(für $x \neq 0$) ist w nicht wirbelfrei und besitzt daher kein Potential. Versuche daher, einen Eulerschen Multiplikator h zu bestimmen, so dass $h \cdot w$ wirbelfrei ist.

1. Versuch: $h = h(x)$

Es ist

$$\partial_y(h(x) w_1(x, y)) \ = \ \partial_y(x^2 y h(x)) \ = \ x^2 h(x)$$

und

$$\partial_x(h(x) w_2(x, y)) \ = \ \partial_x(-2y^2 h(x)) \ = \ -2y^2 h'(x)\,.$$

Dann liefert

$$\partial_y(h(x) w_1(x, y)) \ = \ \partial_x(h(x) w_2(x, y)) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 h(x) \ = \ -2y^2 h'(x)$$

keine Differentialgleichung, die nur von x abhängt.

2. Versuch: $h = h(y)$

Es ist

$$\partial_y(h(y) w_1(x, y)) \ = \ \partial_y(x^2 y h(y)) \ = \ x^2(h(y) + y h'(y))$$

und

$$\partial_x(h(y) w_2(x, y)) \ = \ \partial_x(-2y^2 h(y)) \ = \ 0\,.$$

Dann ist die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_y(h(y) w_1(x, y)) \ = \ \partial_x(h(y) w_2(x, y)) \quad &\Leftrightarrow \quad x^2(h(y) + y h'(y)) \ = \ 0 \\ &\Leftrightarrow \quad h(y) + y h'(y) \ = \ 0 \\ &\Leftrightarrow \quad h'(y) \ = \ -\frac{1}{y}\, h(y) \end{aligned}$$

eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung in y. Diese hat die Lösung $h(y) = \frac{1}{y}$.

Definiere also $\widetilde{w} := h \cdot w$. Dann ist $\widetilde{w}$ wirbelfrei und besitzt somit ein Potential g auf $\mathbb{R}^2$. Wegen $\partial_x g = \widetilde{w}_1$ ist

$$g(x,y) \;=\; \int x^2\,dx \;=\; \frac{x^3}{3} + C(y)\,,$$

und mit $\partial_y g = \widetilde{w}_2$ folgt daraus

$$C'(y) \;=\; -2y\,,\ \text{d.h. } C(y) \;=\; -y^2$$

liefert ein Potential

$$g(x,y) \;=\; \frac{x^3}{3} - y^2$$

von $\widetilde{w}$. Die Lösungen des Differentialgleichungssystems $(\dot{x},\dot{y})^T = v(x,y)$ erfüllen $g(x,y) = C$ mit $C \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Ein Potential g lässt sich hier auch problemlos mit der Formel

$$g(x,y) \;=\; \int_0^1 \langle \widetilde{w}(tx,ty),(x,y)^T\rangle\,dt$$

(siehe Beweis von Satz 53.11, Analysis III) berechnen. Der gewählte Lösungsweg führt manchmal auch zum Erfolg, wenn das Integral der obigen Formel nicht ausgerechnet werden kann.

b) Definiere $w(x,y) := (-x^3-xy^2, x^2y+y^3)^T$. Dann ist w orthogonal zu v, und falls ein Potential zu w existiert, so ist dieses ein erstes Integral des Systems $(\dot{x},\dot{y})^T = v(x,y)$. Wegen

$$\partial_y w_1(x,y) \;=\; -2xy \;\neq\; 2xy \;=\; \partial_x w_2(x,y)$$

(für $x,y \neq 0$) ist w nicht wirbelfrei und besitzt daher kein Potential. Bestimme einen Eulerschen Multiplikator $h = h(x^2+y^2)$, so dass $h \cdot w$ wirbelfrei ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\partial_y(h(x^2+y^2)w_1(x,y)) &= \partial_y((-x^3-xy^2)h(x^2+y^2))\\ &= -2yh(x^2+y^2) + (-x^3-xy^2)\cdot 2yh'(x^2+y^2)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_x(h(x^2+y^2)w_2(x,y)) &= \partial_x((x^2y+y^3)h(x^2+y^2))\\ &= 2xyh(x^2+y^2) + (x^2y+y^3)\cdot 2xh'(x^2+y^2)\,.\end{aligned}$$

Gleichsetzen der beiden Ableitungen führt auf

$$4xy(x^2+y^2)h'(x^2+y^2) \;=\; -4xyh(x^2+y^2) \quad\Leftrightarrow\quad h'(x^2+y^2) \;=\; -\frac{1}{x^2+y^2}\,h(x^2+y^2)$$

(für $xy \neq 0$) und somit auf die homogene lineare Differentialgleichung

$$h'(t) \;=\; -\frac{1}{t}\,h(t)$$

in $t = x^2+y^2$. Diese hat die Lösung $h(t) = \frac{1}{t}$, also $h(x^2+y^2) = \frac{1}{x^2+y^2}$. Definiere also $\widetilde{w} := h \cdot w$. Dann ist $\widetilde{w}$ wirbelfrei und besitzt somit ein Potential g auf $\mathbb{R}^2$. Wegen $\partial_x g = \widetilde{w}_1$ ist

$$g(x,y) \;=\; \int (-x)\,dx \;=\; -\frac{x^2}{2} + C(y)\,,$$

und mit $\partial_y g = \widetilde{w}_2$ folgt daraus

$$C'(y) \;=\; y\,, \text{ d.h. } C(y) \;=\; \frac{y^2}{2}$$

liefert ein Potential

$$g(x,y) \;=\; \frac{y^2 - x^2}{2}$$

von $\widetilde{w}$. Die Lösungen des Differentialgleichungssystems $(\dot{x},\dot{y})^T \;=\; v(x,y)$ erfüllen $g(x,y) = C$ mit $C \in \mathbb{R}$.

sawo