4. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ Sommersemester 2008

Abgabetermin: Mittwoch, 7.5.08, bis 10.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 13: Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \sin(t^2 + x^2)$$

maximale Lösungen besitzt, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Folgt dies auch aus dem Satz von Picard-Lindelöf?

Aufgabe 14: Bestimmen Sie die Lösungen des Systems

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + x^3 + xy^2 \\ x + y^3 + x^2y \end{pmatrix}$$

durch Transformation in Polarkoordinaten.

Aufgabe 15: Es sei $0 \leq k < 1$ und $F(\cdot, k) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(s, k) := \int_0^s \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} \quad (\text{vgl. 5.5 c) der Vorlesung}).$$

a) Zeigen Sie, dass $F(\cdot, k)$ streng monoton wachsend und bijektiv ist. Die zugehörige Umkehrfunktion $\text{am}(\cdot, k) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Amplitudenfunktion* zum Modul k .

Hinweis: Es gilt $F(s + \pi, k) = 2K(k) + F(s, k)$.

b) Zeigen Sie, dass für das *Delta der Amplitude* gilt:

$$\text{dn}(t, k) := \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \text{am}(t, k)} = \text{am}'(t, k)$$

c) Zeigen Sie, dass die durch

$$\text{sn}(\cdot, k) := \sin \text{am}(\cdot, k) \quad \text{und} \quad \text{cn}(\cdot, k) := \cos \text{am}(\cdot, k)$$

definierten Funktionen *Sinus Amplitudinis* und *Kosinus Amplitudinis* die Periode $4K(k)$ haben.

d) Zeigen Sie, dass die in Teil c) definierte Funktion Sinus Amplitudinis mit in der Vorlesung definierten übereinstimmt.

Aufgabe 16: Beweisen Sie die folgenden Formeln für die oben definierten Funktionen.

$$\text{a) } \text{dn}^2 t + k^2 \text{sn}^2 t = 1 \quad \text{b) } \text{am}' t = \text{dn } t \quad \text{c) } \text{sn}' t = \text{cn } t \text{ dn } t$$

$$\text{d) } \text{cn}' t = -\text{sn } t \text{ dn } t \quad \text{e) } \text{dn}' t = -k^2 \text{sn } t \text{ cn } t$$