Musterlösung zu Blatt 4

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sommersemester 2008

13 Für $f(t,x) := \sin(t^2 + x^2)$ gilt:

$$\partial_x f(t,x) \;=\; 2x\cos(t^2 + x^2)$$

Da die partielle Ableitung stetig ist, ist f auf ganz $\mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich x. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existieren daher auf ganz $\mathbb{R}$ lokale Lösungen der Differentialgleichung. Die Behauptung folgt nun aus Satz 3.9 mit den konstanten Funktionen $\alpha = 0$ und $\beta = 1$. Die Differentialgleichung

$$\dot{x} \;=\; \sin(t^2 + x^2)$$

besitzt also maximale Lösungen, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

Diese Aussage folgt nicht aus dem Satz von Picard-Lindelöf, da die partielle Ableitung

$$\partial_x f(t,x) \;=\; 2x\cos(t^2 + x^2)$$

unbeschränkt und somit f nicht auf ganz $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig bezüglich x ist.

Bemerkung: Satz 3.9 lässt sich also insbesondere auf lokal Lipschitz-stetige Funktionen f anwenden, die (bezüglich x) beschränkt sind.

14 Die Transformation in Polarkoordinaten ist gegeben durch:

$$P(r,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ableiten ergibt:

$$P'(r,\varphi)\cdot\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \;=\; \frac{d}{dt}P(r,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -y + x^3 + xy^2 \\ x + y^3 + x^2 y \end{pmatrix}$$

Umformen dieser Gleichung und Einsetzen der Polarkoordinaten liefert:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \;=\; (P'(r,\varphi))^{-1}\begin{pmatrix} -r\sin\varphi + r^3\cos\varphi \\ r\cos\varphi + r^3\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Mit

$$(P'(r,\varphi))^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} \;=\; \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} r^3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bestehend aus zwei Differentialgeichungen mit getrennten Variablen.

Die Lösungen der Differentialgleichung in r ergeben sich (abgesehen von der stationären Lösung $r = 0$) aus

$$\int \frac{dr}{r^3} \;=\; \int 1\,dt \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{2r^2} \;=\; t + \widetilde{C}$$

wegen $r > 0$ als

$$r = \frac{1}{\sqrt{C - 2t}}$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

Die Lösungen der Differentialgleichung in φ sind

$$\varphi = t + D$$

mit $D \in \mathbb{R}$.

Insgesamt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{C - 2t}} \begin{pmatrix} \cos(t + D) \\ \sin(t + D) \end{pmatrix}$$

Die maximalen Lösungen sind auf den Intervallen $\left(-\infty, \frac{C}{2}\right)$ definiert. Die Lösungskurven laufen spiralförmig nach 0 für $t \to -\infty$ und nähern sich asymptotisch einer Geraden für $t \to \frac{C}{2}$.

15 a) Beweise zunächst den Hinweis.

Beh.: $F(s + \pi, k) = 2K(k) + F(s, k)$ für alle $s \in \mathbb{R}$

Bew.:

Nach Definition ist

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}.$$

Die Substitution $t := \sin\eta$ mit $\frac{dt}{d\eta} = \cos\eta$ ergibt

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\eta}{1 - k^2 \sin^2\eta} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\eta}{1 - k^2 \sin^2\eta},$$

wobei die 2. Gleichung aus Symmetriegründen (oder mit einer weiteren Substitution) folgt. Also ist

$$2K(k) = \int_0^{\pi} \frac{d\eta}{1 - k^2 \sin^2\eta}.$$

Einsetzen in die Definition von F liefert nun

$$F(s + \pi, k) = \int_0^{s+\pi} \frac{d\eta}{1 - k^2 \sin^2\eta} = \int_0^{\pi} \frac{d\eta}{1 - k^2 \sin^2\eta} + \int_{\pi}^{s+\pi} \frac{d\eta}{1 - k^2 \sin^2\eta}$$

und mit

$$\int_{\pi}^{s+\pi} \frac{d\eta}{1 - k^2 \sin^2\eta} = \int_0^{s} \frac{d\eta}{1 - k^2 \sin^2\eta} = F(s, k)$$

folgt die behauptete Identität.

Mit dem Hinweis folgt unmittelbar

$$F(s + n\pi, k) = 2nK(k) + F(s, k)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und ebenso

$$F(s - n\pi, k) = -2nK(k) + F(s, k)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus ergibt sich die Surjektivität von F.

F ist nach Definition streng monoton wachsend, da der Integrand positiv ist, und somit injektiv, insgesamt also bijektiv.

b) Mit der Ableitung der Umkehrfunktion ergibt sich unmittelbar:

$$\mathrm{am}'(t,k) = \frac{1}{F'(\mathrm{am}(t,k),k)} = \sqrt{1-k^2\sin^2 \mathrm{am}(t,k)} = \mathrm{dn}(t,k)$$

c) Nach dem Hinweis zu Teil a) gilt

$$F(s+2\pi,k) = 4K(k)+F(s,k)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$s+2\pi = \mathrm{am}(4K(k)+F(s,k),k)$$

und weiter

$$\sin(s+2\pi) = \mathrm{sn}(4K(k)+F(s,k),k)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Mit

$$\sin(s+2\pi) = \sin s = \mathrm{sn}(F(s,k),k)$$

folgt daraus

$$\mathrm{sn}(4K(k)+t,k) = \mathrm{sn}(t,k)$$

mit $t := F(s,k)$. Wegen der Bijektivität von $F(\cdot,k)$ gilt diese Gleichung für alle $t \in \mathbb{R}$. Also hat der Sinus Amplitudinis die Periode $4K(k)$. Es lässt sich leicht überlegen, dass dies die kleinste Periode ist, da der Sinus die kleinste Periode 2π hat.

Wegen

$$\cos t = \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

hat auch der Kosinus Amplitudinis die Periode $4K(k)$.

d) Nach beiden Definitionen des Sinus Amplitudinis gilt

$$\mathrm{sn}(F(s,k),k) = \sin s$$

für alle $s \in \mathbb{R}$, und wegen der Bijektivität von $F(\cdot,k)$ beschreiben beide Definitionen dieselbe Funktion.

16 a) folgt unmittelbar aus den Definitionen

b) siehe Aufgabe 15 b)

c) Mit der Kettenregel und Teil b) folgt:

$$\mathrm{sn}'(t,k) = \frac{d}{dt}\sin \mathrm{am}(t,k) = \cos \mathrm{am}(t,k)\cdot \mathrm{am}'(t,k) = \mathrm{cn}(t,k)\cdot \mathrm{dn}(t,k)$$

d) Mit der Kettenregel und Teil b) folgt:

$$\mathrm{cn}'(t,k) = \frac{d}{dt}\cos \mathrm{am}(t,k) = -\sin \mathrm{am}(t,k)\cdot \mathrm{am}'(t,k) = -\mathrm{sn}(t,k)\cdot \mathrm{dn}(t,k)$$

e) Die Behauptung folgt aus

$$2\cdot \mathrm{dn}(t,k)\cdot \mathrm{dn}'(t,k) = \left(\mathrm{dn}^2(t,k)\right)' = -2k^2\cdot \mathrm{sn}(t,k)\cdot \mathrm{cn}(t,k)\cdot \mathrm{dn}(t,k)$$

durch Umformen nach $\mathrm{dn}'(t,k)$ (dabei entsteht die rechte Seite durch Ableiten der Definition von $\mathrm{dn}^2(t,k)$ und die linke Seite mit der Kettenregel).

sawo