Musterlösung zu Blatt 5

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sommersemester 2008

17 Nach 6.2 c) der Vorlesung lässt sich das Alter des Universums bei gegebenem $\sigma_0 = \frac{\rho_0}{\rho^*} > 0$ mit folgender Formel berechnen.

$$t_0 \;=\; \frac{1}{H_0}\int_0^1 \sqrt{\frac{s}{(1-\sigma_0)s+\sigma_0}}\,ds$$

Im Folgenden sei $\sigma_0 \neq 1$ (der Fall $\sigma_0 = 1$ wird am Ende von 6.2 c) betrachtet). Substituiere

$$u \;:=\; \sqrt{\frac{s}{(1-\sigma_0)s+\sigma_0}}\,.$$

Dann ist

$$s \;=\; \frac{\sigma_0 u^2}{1-(1-\sigma_0)u^2}$$

und

$$\frac{du}{ds} \;=\; \frac{(1-(1-\sigma_0)u^2)^2}{2\sigma_0 u}$$

und es folgt

$$t_0 \;=\; \frac{2\sigma_0}{H_0}\int_0^1 \frac{u^2}{(1-(1-\sigma_0)u^2)^2}\,du \;=\; \frac{2\sigma_0}{H_0(\sigma_0-1)}\int_0^1 \frac{1-(1-\sigma_0)u^2-1}{(1-(1-\sigma_0)u^2)^2}\,du$$

(„Null addieren“), also:

$$t_0 \;=\; \frac{2\sigma_0}{H_0(\sigma_0-1)}\int_0^1 \left(\frac{1}{1-(1-\sigma_0)u^2} - \frac{1}{(1-(1-\sigma_0)u^2)^2}\right)du$$

1. Fall: $\boldsymbol{\sigma_0 < 1}$

Substituiere $v := \sqrt{1-\sigma_0}\,u$. Mit $\frac{dv}{du} = \sqrt{1-\sigma_0}$ folgt:

$$t_0 \;=\; \frac{2\sigma_0}{H_0(1-\sigma_0)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\sqrt{1-\sigma_0}} \left(\frac{1}{(1-v^2)^2} - \frac{1}{1-v^2}\right)dv$$

Wegen

$$\frac{1}{1-v^2} \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-v}+\frac{1}{1+v}\right)$$

und

$$\frac{1}{(1-v^2)^2} \;=\; \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-v}+\frac{1}{1+v}+\frac{1}{(1-v)^2}+\frac{1}{(1+v)^2}\right)$$

ist

$$\frac{1}{(1-v^2)^2} - \frac{1}{1-v^2} \;=\; \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-v)^2}+\frac{1}{(1+v)^2}-\frac{1}{1-v}-\frac{1}{1+v}\right)$$

und somit:

$$t_0 \;=\; \frac{\sigma_0}{2H_0(1-\sigma_0)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1}{1-v}-\frac{1}{1+v}+\log(1-v)-\log(1+v)\right]_0^{\sqrt{1-\sigma_0}}$$

Dies ergibt schließlich:

$$t_0 = \frac{\sigma_0}{2H_0(1-\sigma_0)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{2v}{1-v^2}+\log\frac{1-v}{1+v}\right]_0^{\sqrt{1-\sigma_0}}$$

$$= \frac{1}{H_0}\left(\frac{1}{1-\sigma_0}+\frac{\sigma_0}{2(1-\sigma_0)^{\frac{3}{2}}}\log\frac{1-\sqrt{1-\sigma_0}}{1+\sqrt{1-\sigma_0}}\right)$$

Für $\sigma_0 = 0,5$ ist

$$t_0 = \left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\log(3-2\sqrt{2})\right)\cdot\frac{1}{H_0} \approx 0,7535\cdot\frac{1}{H_0}\,.$$

2. Fall: $\boldsymbol{\sigma_0 > 1}$

Substituiere $v := \sqrt{\sigma_0-1}\,u$. Mit $\frac{dv}{du} = \sqrt{\sigma_0-1}$ folgt:

$$t_0 = \frac{2\sigma_0}{H_0(\sigma_0-1)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\sqrt{\sigma_0-1}}\left(\frac{1}{1+v^2}-\frac{1}{(1+v^2)^2}\right)dv$$

Wegen

$$\int\frac{1}{(1+v^2)^2}\,dv = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{1+v^2}+\arctan v\right)$$

ist

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\cdot\left(\frac{\sigma_0}{(\sigma_0-1)^{\frac{3}{2}}}\left[\arctan v-\frac{v}{1+v^2}\right]_0^{\sqrt{\sigma_0-1}}\right)$$

und somit:

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\cdot\left(\frac{\sigma_0}{(\sigma_0-1)^{\frac{3}{2}}}\arctan\sqrt{\sigma_0-1}-\frac{1}{\sigma_0-1}\right)$$

Für $\sigma_0 = 2$ ist

$$t_0 = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{H_0} \approx 0,57\cdot\frac{1}{H_0}\,.$$

18 Der Energiesatz für die Bewegungsgleichung mit Potential U lautet

$$E = \frac{m}{2}\,\dot{x}^2+U(x)$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = R > 0$ und $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.

a) Hier ist

$$E = \frac{m}{2}\,\dot{x}^2 - cme^{-\alpha x} \quad \text{mit } \alpha, c, m > 0\,.$$

Wie in 6.1 b) folgt, dass $E = 0$ die minimale Energie ist, für die $x(t)$ unbeschränkt ist. Damit ergibt sich für die Fluchtgeschwindigkeit v_F:

$$\frac{m}{2}\,v_F^2 - cme^{-\alpha R} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad v_F = \sqrt{2ce^{-\alpha R}}$$

1. $v_0 = v_F$:

Dann ist $E = 0$, und nach 5.3 lautet die Lösung der Bewegungsgleichung:

$$t \;=\; \int_R^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{-\frac{2}{m}\,U(\xi)}} \;=\; \int_R^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{2ce^{-\alpha\xi}}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2c}} \int_R^{\varphi(t)} e^{\frac{\alpha}{2}\,\xi}\,d\xi$$

Das Integral lässt sich leicht berechnen, und es ergibt sich:

$$t \;=\; \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2}{c}}\left[e^{\frac{\alpha}{2}\,\xi}\right]_R^{\varphi(t)} \;=\; \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2}{c}}\left(e^{\frac{\alpha}{2}\,\varphi(t)} - e^{\frac{\alpha}{2}\cdot R}\right)$$

Umformen der Gleichung liefert schließlich:

$$\varphi(t) \;=\; \frac{2}{\alpha}\,\log\left(\alpha\sqrt{\frac{c}{2}}\;t + e^{\frac{\alpha}{2}\cdot R}\right)$$

2. $v_0 > v_F$:

Dann ist $E > 0$, und wie in 6.1 d) folgt

$$\dot{x} \;\geq\; v_\infty \;=\; \sqrt{\frac{2E}{m}} \;>\; 0$$

und $x \rightarrow v_\infty$ für $t \rightarrow \infty$. Desweiteren gilt

$$x(t) - R \;=\; \int_0^t \dot{x}(t)\,dt \;\geq\; \int_0^t v_\infty\,dt \;=\; v_\infty \cdot t$$

und somit:

$$x(t) \;\geq\; R + v_\infty \cdot t$$

3. $v_0 < v_F$:

Dann ist $E < 0$, und wie in 6.1 f) folgt die Existenz eines Maximums x_1, für das gilt:

$$E \;=\; -cme^{-\alpha x_1} \quad\Leftrightarrow\quad x_1 \;=\; -\frac{1}{\alpha}\,\log\frac{-E}{cm}$$

Bemerkung: In den beiden Fällen mit $v_0 \neq v_F$ ist die Berechnung der in (5.7) vorkommenden Integrale elementar möglich aber sehr langwierig.

b) Hier ist

$$E \;=\; \frac{m}{2}\,\dot{x}^2 - cm\frac{e^{-\alpha x}}{x} \quad \text{mit } \alpha, c, m > 0\,.$$

Wie in 6.1 b) folgt, dass $E = 0$ die minimale Energie ist, für die $x(t)$ unbeschränkt ist. Damit ergibt sich für die Fluchtgeschwindigkeit v_F:

$$\frac{m}{2}\,v_F^2 - cm\frac{e^{-\alpha R}}{R} \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad v_F \;=\; \sqrt{2c\frac{e^{-\alpha R}}{R}}$$

1. $v_0 = v_F$:

Dann ist $E = 0$, und nach 5.3 lautet die Lösung der Bewegungsgleichung:

$$t \;=\; \int_R^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{-\frac{2}{m}\,U(\xi)}} \;=\; \int_R^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{2c\,\frac{e^{-\alpha\xi}}{\xi}}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2c}} \int_R^{\varphi(t)} \sqrt{\xi}\,e^{\frac{\alpha}{2}\,\xi}\,d\xi$$

Leider ist das verbleibende Integral nicht elementar lösbar.

2. $v_0 > v_F$:

Dann ist $E > 0$, und es folgen die entsprechenden Aussagen wie in Teil a).

3. $v_0 < v_F$:

Dann ist $E < 0$, und wie in 6.1 f) folgt die Existenz eines Maximums x_1, für das gilt:

$$E = -cm\,\frac{e^{-\alpha x_1}}{x_1}$$

Leider lässt sich diese Gleichung nicht nach x_1 auflösen.

19 ohne Durchführung

20 Eine Ellipse lässt sich parametrisieren durch

$$x(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \qquad \text{für } t \in [0, 2\pi)$$

mit $a \geq b > 0$. Ist $e := \sqrt{a^2 - b^2}$ die Exzentrität, so liegen die beiden Brennpunkte in $(\pm e, 0)^T$, und für $t \in [0, 2\pi)$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \|x(t) - (-e,0)^T\|_2 + \|x(t) - (e,0)^T\|_2 \\
= \;& \sqrt{a^2\cos^2 t + 2a\cos t\sqrt{a^2-b^2} + a^2 - b^2 + b^2\sin^2 t} \\
& + \sqrt{a^2\cos^2 t - 2a\cos t\sqrt{a^2-b^2} + a^2 - b^2 + b^2\sin^2 t} \\
= \;& \sqrt{a^2\cos^2 t + 2a\cos t\sqrt{a^2-b^2} + a^2 - b^2\cos^2 t} \\
& + \sqrt{a^2\cos^2 t - 2a\cos t\sqrt{a^2-b^2} + a^2 - b^2\cos^2 t} \\
= \;& \sqrt{(a^2-b^2)\cos^2 t + 2a\cos t\sqrt{a^2-b^2} + a^2} \\
& + \sqrt{(a^2-b^2)\cos^2 t - 2a\cos t\sqrt{a^2-b^2} + a^2} \\
= \;& \sqrt{(\sqrt{a^2-b^2}\cos t + a)^2} + \sqrt{(\sqrt{a^2-b^2}\cos t - a)^2} \\
= \;& |\sqrt{a^2-b^2}\cos t + a| + |\sqrt{a^2-b^2}\cos t - a| \\
= \;& \sqrt{a^2-b^2}\cos t + a + a - \sqrt{a^2-b^2}\cos t \\
= \;& 2a
\end{aligned}$$

sawo