

Musterlösung zu Blatt 6

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sommersemester 2008

- 21** Die homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit gegebenem Anfangswert hat die Lösung

$$x(t) = e^{2t}.$$

Das Eulersche Polygonzugverfahren auf dem Intervall $[0, \delta]$ mit Schrittweite $h = \frac{\delta}{m}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ lautet hier $y_0^h = 1$ und

$$y_{j+1}^h = y_j^h + \frac{\delta}{m} \cdot 2y_j^h = \left(1 + \frac{2\delta}{m}\right) y_j^h$$

für $j = 0, \dots, m-1$. Dies ergibt offensichtlich die explizite Formel

$$y_j^h = \left(1 + \frac{2\delta}{m}\right)^j$$

für $j \in \{0, \dots, m\}$, insbesondere

$$y_m^h = \left(1 + \frac{2\delta}{m}\right)^m.$$

Bekanntermaßen gilt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2\delta}{m}\right)^m = e^{2\delta}$$

- 22** Der Beweis verläuft analog zum Beweis des Lemmas von Gronwall (3.8).

Es sei o.E. $t > \tau$ (sonst vertausche die Integrationsgrenzen) und zunächst $B > 0$. Für die Funktion

$$G(t) := \int_{\tau}^t g(s)h(s) ds + B$$

gilt $G(t) > 0$ für $t \geq \tau$, und wegen der Voraussetzung $g(t) \leq G(t)$ ist

$$\frac{d}{dt}(\log G) = \frac{\dot{G}}{G} = \frac{gh}{G} \leq h,$$

also

$$\log G(t) - \log G(\tau) \leq \int_{\tau}^t h(s) ds$$

und somit

$$g(t) \leq G(t) \leq G(\tau)e^{\int_{\tau}^t h(s) ds} = Be^{\int_{\tau}^t h(s) ds},$$

also die Behauptung.

Gilt nun die Voraussetzung für *alle* $B > 0$, so gilt dies auch für die behauptete Ungleichung; dann ist aber $g = 0$, und die behauptete Ungleichung gilt mit $B = 0$.

23 Die Transformation in Polarkoordinaten ist gegeben durch:

$$P(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ableiten ergibt:

$$P'(r, \varphi) \cdot \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} P(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - y - x^3 - xy^2 \\ x + \alpha y - x^2y - y^3 \end{pmatrix}$$

Umformen dieser Gleichung und Einsetzen der Polarkoordinaten liefert:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = (P'(r, \varphi))^{-1} \begin{pmatrix} \alpha r \cos \varphi - r \sin \varphi - r^3 \cos \varphi \\ r \cos \varphi + \alpha r \sin \varphi - r^3 \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Mit

$$(P'(r, \varphi))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha r - r^3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung in φ sind offensichtlich

$$\varphi = t + D$$

mit $D \in \mathbb{R}$.

Die Differentialgleichung in r ist eine Bernoulli-Differentialgleichung. Sie besitzt die stationären Lösungen $r = 0$ und, falls $\alpha > 0$ ist, $r = \sqrt{\alpha}$. Die positiven Lösungen ergeben sich nach 2.14 durch die Substitution $y := \frac{1}{r^2}$ aus den Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$\dot{y} = -2\alpha y + 2.$$

1. Fall: $\alpha = 0$

Die Lösungen von

$$\dot{y} = 2$$

sind offensichtlich

$$y = 2t + C,$$

und Rücksubstitution ergibt

$$r = \frac{1}{\sqrt{2t + C}}$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

Die Lösungen des Differentialgleichungssystems sind also:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2t + C}} \begin{pmatrix} \cos(t + D) \\ \sin(t + D) \end{pmatrix}$$

Die maximalen Lösungen sind auf den Intervallen $(-\frac{C}{2}, \infty)$ definiert. Die Lösungskurven laufen spiralförmig nach 0 für $t \rightarrow \infty$ und nähern sich asymptotisch einer

Geraden für $t \rightarrow -\frac{C}{2}$.

2. Fall: $\alpha \neq 0$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$y_h = Ce^{-2\alpha t}$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist $y_s = \frac{1}{\alpha}$. Somit ergibt sich als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y = \frac{1}{\alpha} + Ce^{-2\alpha t},$$

und Rücksubstitution liefert

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha} + Ce^{-2\alpha t}}}$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

Die Lösungen des Differentialgleichungssystems sind also:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha} + Ce^{-2\alpha t}}} \begin{pmatrix} \cos(t + D) \\ \sin(t + D) \end{pmatrix}$$

Ist $\alpha > 0$ und $C = 0$, so sind die maximalen Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Die Lösungskurven laufen kreisförmig auf $S_{\sqrt{\alpha}}(0)$.

Ist $\alpha > 0$ und $C > 0$, so sind die maximalen Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Die Lösungskurven laufen spiralförmig von 0 nach $S_{\sqrt{\alpha}}(0)$.

Ist $\alpha > 0$ und $C < 0$, so sind die maximalen Lösungen jeweils auf dem Intervall $(\frac{1}{2\alpha} \log(-\alpha C), \infty)$ definiert. Die Lösungskurven laufen spiralförmig nach $S_{\sqrt{\alpha}}(0)$ für $t \rightarrow \infty$ und nähern sich asymptotisch einer Geraden für $t \rightarrow \frac{1}{2\alpha} \log(-\alpha C)$.

Ist $\alpha < 0$, so muss $C > 0$ sein, und die maximalen Lösungen sind jeweils auf dem Intervall $(\frac{1}{2\alpha} \log(-\alpha C), \infty)$ definiert. Die Lösungskurven laufen spiralförmig nach 0 für $t \rightarrow \infty$ und nähern sich asymptotisch einer Geraden für $t \rightarrow \frac{1}{2\alpha} \log(-\alpha C)$.

24 Die Differentialgleichung

$$\dot{x} = (x + t - 4)^2$$

lässt sich nach 2.13 a) mit der Substitution $u := x + t - 4$ in die Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt} = 1 + u^2$$

mit getrennten Variablen mit Anfangswert $u(\pi) = 0$ überführen. Deren Lösung ist gegeben durch

$$\int_0^u \frac{1}{1 + \xi^2} d\xi = \int_\pi^t 1 d\tau \Leftrightarrow \arctan u = t - \pi \Leftrightarrow u = \tan(t - \pi)$$

und nach Rücksubstitution

$$x(t) = \tan(t - \pi) - t + 4$$

für $t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$.

sawo