Musterlösung zu Blatt 7

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sommersemester 2008

25 Die Menge $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ der Folgeglieder ist wegen $\sup\{\|f_n\|_{\sup} \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$ beschränkt und wegen $\sup\{\|f_n'\|_{\sup} \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$ gleichstetig (siehe Beispiel 8.3). Da zudem $\mathcal{C}[a,b]$ (mit der Supremumsnorm) vollständig ist, besitzt (f_n) nach dem Satz von Arzelà-Ascoli eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{n,0})$. Die Folge $(f_{n,0}')$ der ersten Ableitungen ist nach der gleichen Argumentation ebenfalls beschränkt und gleichstetig, und auch $\mathcal{C}^1[a,b]$ ist vollständig. Also besitzt $(f_{n,0})$ und damit auch (f_n) eine Teilfolge $(f_{n,1})$, so dass die Teilfolge und deren erste Ableitungen jeweils gleichmäßig konvergieren. So lässt sich schrittweise eine Teilfolge $(f_{n,j})$ von (f_n) konstruieren, so dass die Folgen $(f_{n,j}^{(k)})$ der k-ten Ableitungen für $0 \le k \le j$ gleichmäßig konvergieren. Die Diagonalfolge $(f_n^*) := (f_{n,n})$ hat dann die gewünschte Eigenschaft (vgl. Beweis zu Lemma 8.5).

26 a) Der Ansatz

$$x(t) \;=\; a\cos(\alpha t) + b\sin(\alpha t)$$

mit Ableitungen

$$\dot{x}(t) \;=\; -\alpha a\sin(\alpha t) + \alpha b\cos(\alpha t)$$

und

$$\ddot{x}(t) \;=\; -\alpha^2 a\cos(\alpha t) - \alpha^2 b\sin(\alpha t)$$

liefert nach Einsetzen in die Differentialgleichung das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} (25-\alpha^2)a & + & 6\alpha b & = & 1 \\ -6\alpha a & + & (25-\alpha^2)b & = & 0 \end{array}$$

(da $\cos(\alpha t)$, $\sin(\alpha t)$ linear unabhängig sind) mit Lösung:

$$a \;=\; \frac{25-\alpha^2}{(25-\alpha^2)^2+36\alpha^2}\,, \quad b \;=\; \frac{6\alpha}{(25-\alpha^2)^2+36\alpha^2}$$

Eine spezielle Lösung der Differentialgleichung lautet also:

$$\psi_0(t) \;=\; \frac{25-\alpha^2}{(25-\alpha^2)^2+36\alpha^2}\cos(\alpha t) + \frac{6\alpha}{(25-\alpha^2)^2+36\alpha^2}\sin(\alpha t)$$

b) Die homogene lineare Differentialgleichung hat konstante Koeffizienten. Die Nullstellen des charakterischen Polynoms sind:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 25 \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \;=\; -3 \pm 4i$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist also gegeben durch $\varphi_1(t) = e^{-3t}\cos(4t)$ und $\varphi_2(t) = e^{-3t}\sin(4t)$. Die zugehörige Wronski-Determinante ist nach 9.14 (mit $\tau := 0$)

$$W(t) \;=\; W(0)\,e^{-\int_0^t 6\,ds} \;=\; W(0)\,e^{-6t}$$

mit

$$W(0) \;=\; \det\begin{pmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) \\ \dot{\varphi}_1(0) & \dot{\varphi}_2(0) \end{pmatrix} \;=\; \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \;=\; 4\,.$$

Eine spezielle Lösung ψ_0 der inhomogenen Gleichung ergibt sich durch Variation der Konstanten. Nach Folgerung 9.16 gilt:

$$\psi_0(t) \;=\; \int_0^t \frac{1}{W(s)} \det \begin{pmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_1(t) \\ \varphi_2(s) & \varphi_2(t) \end{pmatrix} b(s)\,ds$$

Mit

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_1(t) \\ \varphi_2(s) & \varphi_2(t) \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} e^{-3s}\cos(4s) & e^{-3t}\cos(4t) \\ e^{-3s}\sin(4s) & e^{-3t}\sin(4t) \end{pmatrix} \\ &= e^{-3(s+t)}\cos(4s)\sin(4t) - \sin(4s)\cos(4t) \\ &= e^{-3(s+t)}\sin(4(t-s)) \end{aligned}$$

folgt:

$$\psi_0(t) \;=\; \frac{1}{4}\int_0^t e^{3(s-t)}\sin(4(t-s))\cos(\alpha s)\,ds$$

Mit der trigonometrischen Formel

$$\sin\beta\cos\gamma \;=\; \frac{1}{2}\left(\sin(\beta+\gamma)+\sin(\beta-\gamma)\right)$$

lässt sich dieses Integral auf die Berechnung von

$$\int_0^t e^{3(s-t)}\sin(4(t-s)\pm\alpha s)\,ds$$

zurückführen. Ist $\pm\alpha = 4$, so ergibt sich unmittelbar:

$$\int_0^t e^{3(s-t)}\sin(4t)\,ds \;=\; \frac{1}{3}\,e^{3(s-t)}\sin(4t)\Big|_0^t \;=\; \frac{1}{3}\,(1-e^{-3t})\sin(4t)$$

Ist $\pm\alpha \neq 4$, so liefert zweimalige partielle Integration das folgende Ergebnis.

$$\begin{aligned} &\int_0^t e^{3(s-t)}\sin(4(t-s)\pm\alpha s)\,ds \\ = \;& \frac{e^{3(s-t)}}{9+(4\pm\alpha)^2}\left(3\sin(4(t-s)\pm\alpha s)+(4\pm\alpha)\cos(4(t-s)\pm\alpha s)\right)\Big|_0^t \end{aligned}$$

Einsetzen der Grenze $s = 0$ ergibt offensichtlich eine Lösung der homogenen Gleichung, die als Summand der speziellen Lösung weggelassen werden kann, damit leztere einfacher wird. Wird dies getan, so ergibt sich schließlich dieselbe spezielle Lösung ψ_0 wie in Teil a).

Bemerkung: Wie dieses Beispiel zeigt, ist die Berechnung einer speziellen Lösung mittels Variation der Konstanten häufig recht aufwendig, wohingegen ein geeigneter Ansatz manchmal schneller eine Lösung liefert.

27 Ist $b = 0$, so ist $\varphi(t) = t+1$ offensichtlich die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems. Ist b beliebig (mit den geforderten Eigenschaften), so gilt für die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems $\varphi(t) \geq t+1$ für $t \geq 0$, was sich wie folgt zeigen lässt.

Ist $\varphi(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$, so folgt die Behauptung unmittelbar aus der Tatsache, dass φ wegen $\ddot{\varphi}(t) = b(t)\,\varphi(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$ konvex ist.

Annahme: $\exists\, t_1 > 0\colon\ \varphi(t_1) < 0$

Da φ stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle t_0, und diese lässt sich minimal wählen. Dann folgt wie oben, dass φ konvex auf $[0, t_0]$ ist mit

$$\varphi(t) \;\geq\; t+1 \;\geq\; 1$$

für alle $t \in [0, t_0]$. **Widerspruch!**

Somit folgt

$$\varphi(t) \;\geq\; t+1 \;\rightarrow\; \infty$$

für $t \to \infty$.

28 Das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{X} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{2}{t} & 1 \\ \frac{1}{t} & 1 \end{pmatrix} X$$

besitzt die nicht triviale Lösung

$$\psi(t) \;=\; \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix},$$

wie sich leicht nachrechnen lässt. Der Ansatz

$$x(t) \;=\; \alpha(t)\psi(t) + y(t)$$

mit einer skalaren Funktion α und $y = (0, y_2)^T$ liefert:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{2}{t} & 1 \\ \frac{1}{t} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix} - \dot{\alpha} \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} y_2 - \dot{\alpha} t \\ y_2 + \dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\dot{\alpha} \;=\; \frac{y_2}{t} \quad \text{und} \quad \dot{y}_2 \;=\; \left(1 + \frac{1}{t}\right) y_2$$

Die homogene lineare Differentialgleichung in y_2 besitzt $y_2 = te^t$ als Lösung, und daraus ergibt sich $\alpha = e^t$. Schließlich ist

$$\rho(t) \;=\; e^t \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ te^t \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} te^t \\ (t-1)e^t \end{pmatrix}$$

eine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems, die ψ zu einem Fundamentalsystem ergänzt.

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ergibt sich durch Variation der Konstanten. Das Fundamentalsystem

$$\Phi \;=\; \begin{pmatrix} t & te^t \\ -1 & (t-1)e^t \end{pmatrix}$$

hat

$$\Phi^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t} \\ \frac{1}{t^2 e^t} & \frac{1}{t e^t} \end{pmatrix}$$

als Inverses, und nach Satz 9.9 ist eine Lösung des inhomogenen Systems gegeben durch:

$$\psi_0(t) \;=\; \Phi \int \Phi^{-1}(t)\, b(t)\, dt$$

Mit

$$\Phi^{-1}(t)\, b(t) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t} \\ \frac{1}{t^2 e^t} & \frac{1}{t e^t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ 1 - 2t \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

ergibt sich:

$$\psi_0(t) \;=\; \begin{pmatrix} t & te^t \\ -1 & (t-1)e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} t^2 + 2t \\ t - 2 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems lautet also

$$x(t) \;=\; \begin{pmatrix} t^2 + 2t \\ t - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & te^t \\ -1 & (t-1)e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

sawo