Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fakultät für Mathematik
TU Dortmund

8. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“
Sommersemester 2008

Abgabetermin: Mittwoch, 4.6.08, bis 10.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 29: Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{x} - \frac{2}{t}\,\dot{x} + \left(1 + \frac{2}{t^2}\right) x \;=\; te^t\,.$$

Hinweis: Eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist $x(t) = t\sin t$.

Aufgabe 30: Es seien E ein Banachraum, $\dim E < \infty$, $T \in L(E)$, $f \in \mathcal{O}(\sigma(T))$ und $x \in E$ mit $Tx = \mu x$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$f(T)\,x \;=\; f(\mu)\,x$$

Aufgabe 31: Es seien E ein Banachraum, $\dim E = n < \infty$ und $T \in L(E)$ mit Spektrum $\sigma(T) = \{0\}$. Zeigen Sie $T^n = 0$ mit möglichst elementaren Methoden der Linearen Algebra (ohne Verwendung des Satzes von Cayley-Hamilton).

Aufgabe 32: Es sei $A \in \mathcal{C}(I, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ mit $A(s)A(t) = A(t)A(s)$ für alle $s, t \in I$. Für $\tau \in I$ sei

$$B(t) \;:=\; \int_\tau^t A(s)\,ds\,.$$

Zeigen Sie, dass $\Phi(t) := \exp(B(t))$ das Fundamentalsystem von

$$\dot{x} \;=\; A(t)\,x \quad \text{mit} \;\; \Phi(\tau) \;=\; I$$

ist.