Musterlösung zu Blatt 8

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sommersemester 2008

29 Die homogene Differentialgleichung

$$\ddot{x} - \frac{2}{t}\dot{x} + \left(1 + \frac{2}{t^2}\right)x = 0$$

hat $\psi(t) = t \sin t$ als Lösung, wie sich leicht nachrechnen lässt. Eine weitere Lösung der homogenen Gleichung lässt sich mit dem Reduktionsverfahren von d'Alembert finden. Der Ansatz

$$x(t) = \alpha(t)\psi(t)$$

liefert nach 9.17 b) die lineare Differentialgleichung

$$\psi \ddot{\alpha} + (a_1\psi + 2\dot{\psi})\dot{\alpha} = 0$$

1. Ordnung in $\dot{\alpha}$. Hier also:

$$t \sin t \ddot{\alpha} + \underbrace{\left(-\frac{2}{t}t \sin t + 2 \sin t + 2t \cos t\right)}_{=0} \dot{\alpha} = 0$$

Division durch $t \sin t$ ergibt daraus:

$$\ddot{\alpha} + 2 \cot t \dot{\alpha} = 0$$

Wegen

$$\int \cot t \, dt = \int \frac{\cos t}{\sin t} \, dt = \log |\sin t|$$

ist

$$\dot{\alpha} = e^{-2 \log |\sin t|} = \frac{1}{\sin^2 t}$$

und

$$\alpha = -\cot t.$$

Da das Vorzeichen der Lösung (als multiplikative Konstante) beliebig gewählt werden kann, ist durch $\rho(t) := t \cos t$ eine weitere Lösung gegeben, die ψ zu einem Fundamentalsystem ergänzt.

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung lässt sich wie in Aufgabe 26 b) mittels Variation der Konstanten finden, was aber eine längliche Rechnung erfordert. Einfacher geht es mit dem Ansatz

$$x(t) = Cte^t$$

für $C \in \mathbb{R}$. Mit

$$\dot{x}(t) = C(t+1)e^t$$

und

$$\ddot{x}(t) = C(t+2)e^t$$

folgt durch Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$2Cte^t = te^t \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{2}$$

Somit ist

$$\psi_0(t) = \frac{t}{2} e^t$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung ist dann natürlich

$$x(t) = \psi_0(t) + c_1\psi(t) + c_2\rho(t)$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

30 Mit der Potenzreihendarstellung

$$f(T) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j T^j \quad (\text{siehe 10.4})$$

folgt unmittelbar

$$f(T)x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j T^j x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \mu^j x = f(\mu)x$$

für alle $x \in E$.

31 Annahme: $T^n \neq 0$

Ist $\text{Rang } T = n$, so ist T ein Isomorphismus und besitzt ausschließlich von Null verschiedene Eigenwerte. Sei also $\text{Rang } T < n$. Es gilt $\text{Rang } T^{j+1} \leq \text{Rang } T^j$ für $1 \leq j \leq n-1$, und wegen $\text{Rang } T^n > 0$ ist $\text{Rang } T^{j_0+1} = \text{Rang } T^{j_0}$ für ein j_0 . Dann ist auch $\text{Kern } T^{j_0+1} = \text{Kern } T^{j_0}$. Somit existiert ein nicht trivialer Unterraum U von V , so dass

$$T^{j_0}|_U = (T^{j_0} \cdot T)|_U : U \rightarrow U$$

ein Isomorphismus und dann auch $T|_U : U \rightarrow U$ ein Isomorphismus ist, d.h. T besitzt von Null verschiedene Eigenwerte. **Widerspruch!**

Also ist $T^n = 0$.

32 Aus der Voraussetzung folgt unmittelbar, dass

$$A(t)B(t) = B(t)A(t) \quad \text{für alle } t \in I$$

gilt. Daher lässt sich mit der Produktregel folgende Ableitung bilden.

$$\frac{d}{dt}(B(t)B(t)) = A(t)B(t) + B(t)A(t) = 2A(t)B(t)$$

Entsprechend folgt

$$\frac{d}{dt}(B^k(t)) = kA(t)B^{k-1}(t)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und damit

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^n \frac{B^k(t)}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{A(t)B^{k-1}(t)}{(k-1)!} = A(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B^k(t)}{k!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Reihe

$$\exp(B(t)) = \sum_{k=0}^n \frac{B^k(t)}{k!}$$

lokal gleichmäßig konvergiert, folgt mit dem Satz von Weierstraß schließlich:

$$\frac{d}{dt} \exp(B(t)) = A(t) \exp(B(t))$$

Also ist $\Phi(t) = \exp(B(t))$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung, und es gilt natürlich $\Phi(\tau) = I$.

sawo