Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fakultät für Mathematik
TU Dortmund

9. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“
Sommersemester 2008

Abgabetermin: Mittwoch, 11.6.08, bis 10.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 33: Es sei $\{\varphi, \psi\}$ ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a_1(t)\, x + a_0(t) \;=\; 0 \quad \text{mit } a_0, a_1 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})\,.$$

Zeigen Sie:

a) φ hat höchstens isolierte Nullstellen.

b) Aus $\varphi(\tau) = 0$ folgt $\psi(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in I$.

c) Es seien $\tau_1, \tau_2 \in I$ mit $\tau_1 < \tau_2$ und $\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2) = 0$. Dann gibt es ein $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ mit $\psi(\tau) = 0$.

Hinweis zu b) und c): Wronski-Determinante

Aufgabe 34: Ein Polynom

$$p(x) \;=\; x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \;\in\; \mathbb{R}[x]$$

hat eine Faktorisierung

$$p(x) \;=\; (x + \alpha)(x^2 + px + q) \quad \text{mit } \alpha, p, q \in \mathbb{R}\,.$$

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.

a) $\operatorname{Re} \lambda < 0$ für alle Nullstellen λ von p

b) $\alpha > 0$, $p > 0$ und $q > 0$

c) $a_0 > 0$, $a_2 > 0$ und $a_1 a_2 - a_0 > 0$

Aufgabe 35: Es seien $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(n)$ und

$$q(t) \;=\; \sum_{k=0}^{d} q_k t^k \;\in\; \mathbb{C}^n[t]$$

ein Polynom vom Grad d mit Koeffizienten in $\mathbb{C}^n$. Zeigen Sie:

a) Ist B regulär, so hat das System

$$(*) \qquad \dot{x} \;=\; Bx + q(t)$$

genau eine Polynomlösung, und diese hat den Grad d.

b) Ist B singulär, so gibt es mehrere Polynomlösungen von $(*)$. Schätzen Sie deren maximalen Grad ab!

Aufgabe 36: Gegeben sei das System

$$(*) \qquad \dot{x} \;=\; A(t)x + b(t)$$

mit periodischen Koeffizienten $A(t+p) = A(t)$ und $b(t+p) = b(t)$. Weiter sei

$$\Phi(t) \;=\; Q(t)e^{Bt}$$

die Floquet-Darstellung des Fundamentalsystems der homogenen Gleichung mit $\Phi(0) = I$. Zeigen Sie, dass $x(t)$ genau dann eine Lösung von $(*)$ ist, wenn $y(t) := Q^{-1}(t)x(t)$ das System

$$\dot{y} \;=\; By + c(t) \quad \text{mit } c(t) \;=\; Q(t)^{-1}b(t)$$

löst.