Musterlösung zu Blatt 9

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sommersemester 2008

33 a) **Annahme:** Die Nullstellen von φ besitzen einen Häufungspunkt t_0.

Dann existiert eine Folge (t_k) von Nullstellen mit $t_k \neq t_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t_k \to t_0$ für $k \to \infty$. Da φ stetig ist, ist auch t_0 Nullstelle, und für die Ableitung von φ gilt:

$$\dot{\varphi}(t_0) \ = \ \lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_0)}{t_k - t_0} \ = \ 0$$

Dann ist aber $(\varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0))^T$ der Nullvektor, und nach Satz 9.2 kann $(\varphi, \dot{\varphi})^T$ kein Element eines Fundamentalsystems des zur Differentialgleichung gehörigen Systems seien. **Widerspruch!**

Also hat φ höchstens isolierte Nullstellen.

b) **Annahme:** $\psi(\tau) = 0$

Dann gilt für die Wronski-Determinante

$$W(\tau) \ = \ \det \begin{pmatrix} \varphi(\tau) & \psi(\tau) \\ \dot{\varphi}(\tau) & \dot{\psi}(\tau) \end{pmatrix} \ = \ 0\,,$$

und nach Bemerkung 9.7 verschwindet $W(t)$ identisch. **Widerspruch!**

Also ist $\psi(\tau) \neq 0$.

c) Nach Teil a) können τ_1, τ_2 o.E. als aufeinanderfolgend angenommen werden, d.h. in (τ_1, τ_2) liegen keine weiteren Nullstellen von φ. Nach Bemerkung 9.7 ist die zum Fundamentalsystem gehörige Wronski-Determinante stets positiv oder stets negativ. Sei also zum Beispiel

$$W(t) \ = \ \varphi(t)\dot{\psi}(t) - \dot{\varphi}(t)\psi(t) \ > \ 0$$

für alle $t \in I$. Es ist somit

$$W(\tau_k) \ = \ -\dot{\varphi}(\tau_k)\psi(\tau) \ < \ 0$$

für $k = 1, 2$. Insbesondere sind $\dot{\varphi}(\tau_1)$, $\dot{\varphi}(\tau_2)$, $\psi(\tau_1)$, $\psi(\tau_2)$ alle von Null verschieden.

Ist nun zum Beispiel $\dot{\varphi}(\tau_1) > 0$, so muss $\dot{\varphi}(\tau_2) < 0$ gelten, denn andernfalls wäre φ ein Stück rechts von τ_1 positiv und ein Stück links von τ_2 negativ, d.h. φ besäße nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in (τ_1, τ_2) – im Widerspruch zur Voraussetzung. Es folgt dann $\psi(\tau_1) < 0$ und $\psi(\tau_2) > 0$, und nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ mit $\psi(\tau) = 0$.

In allen anderen Fällen lässt sich die Behauptung völlig analog zeigen.

Bemerkung: Die drei Aussagen über die Nullstellen von φ und ψ sind auch unter dem Namen *Sturmscher Trennungssatz* bekannt.

34 „a) $\Leftrightarrow$ b)“:

Mit der pq-Formel ergibt sich aus der Faktorisierung

$$p(x) \ = \ 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \ = -\alpha \quad \vee \quad x \ = \ -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

mit $D := \frac{p^2}{4} - q$. Ist $D < 0$ (und insbesondere $q > 0$), so sind die Realteile der Nullstellen gegeben durch $-\alpha$ und $-\frac{p}{2}$, und die behauptete Äquivalenz ist offensichtlich. Ist $D \geq 0$, so sind alle drei Nullstellen reell, und die Behauptung folgt aus:

$$q \;>\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{D} \;<\; \frac{|p|}{2} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\text{ beide negativ, falls } p > 0$$

„b) $\Leftrightarrow$ c)“:

Ausmultiplizieren der Faktorisierung und Koeffizientenvergleich ergibt:

$$a_0 \;=\; \alpha q\,,\quad a_1 \;=\; \alpha p + q\,,\quad a_2 \;=\; \alpha + p$$

Gilt nun $\alpha > 0$, $p > 0$ und $q > 0$, so ist offensichtlich $a_0 > 0$, $a_2 > 0$ und auch

$$a_1 a_2 - a_0 \;=\; \alpha^2 p + \alpha p^2 + pq \;>\; 0\,.$$

Sind umgekehrt $a_0 > 0$, $a_2 > 0$ und $a_1 a_2 - a_0 > 0$, so ist offensichtlich auch $a_1 > 0$, und es gelten die folgenden vier Ungleichungen.

$$a_0 \;=\; \alpha q \;>\; 0\,,\quad a_1 \;=\; \alpha p + q \;>\; 0\,,\quad a_2 \;=\; \alpha + p \;>\; 0$$

und

$$a_1 a_2 - a_0 \;=\; p(\alpha^2 + \alpha p + q) \;>\; 0\,.$$

Aus der ersten Ungleichung folgt unmittelbar, dass α und q dasselbe Vorzeichen haben. Die Annahme, dass beide negativ sind, führt im Falle $p \geq 0$ mit der zweiten und im Falle $p < 0$ mit der dritten Ungleichung zum Widerspruch. Also gilt $\alpha > 0$ und $q > 0$. Damit folgt aus der vierten Ungleichung (unter Berücksichtigung der zweiten), dass auch $p > 0$ ist.

Bemerkung: „a) $\Leftrightarrow$ c)“ ist das Routh-Hurwitz-Kriterium für $n = 3$ (siehe 13.6).

35 a) Es sei $r > d$. Einsetzen von

$$\varphi(t) \;:=\; \sum_{k=0}^{r} p_k t^k \quad\text{mit}\quad \dot\varphi(t) \;=\; \sum_{k=0}^{r-1} (k+1) p_{k+1} t^k$$

in $(*)$ liefert:

$$\sum_{k=0}^{r-1} (k+1) p_{k+1} t^k \;=\; \sum_{k=0}^{r} B p_k t^k + \sum_{k=0}^{d} q_k t^k$$

Da B regulär ist, folgt für $k > d$ aus der Gleichung

$$0 \;=\; B p_k + 0$$

unmittelbar $p_k = 0$ und für $k = d$ aus

$$0 \;=\; B p_d + q_d$$

unmittelbar

$$p_d \;=\; -B^{-1} q_d \;\neq\; 0$$

d.h. das Polynom φ hat den Grad d. Die Koeffizienten p_k lassen sich nun für $k = d-1, \ldots, 0$ rekursiv als

$$p_k \;=\; B^{-1}((k+1)p_{k+1} - q_k)$$

bestimmen und sind eindeutig.

b) Betrachte zunächst den Fall $\sigma(B) = \{0\}$. Mit $r := p(B;0)$ gilt dann $B^r = 0$. Der Ansatz von Teil a) liefert nun die folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} p_1 &= Bp_0 + q_0 \\ 2p_2 &= Bp_1 + q_1 \;=\; B^2p_0 + Bq_0 + q_1 \\ &\;\vdots \\ (d+1)p_{d+1} &= B^{d+1}p_0 + B^dq_0 + \ldots + Bq_{d-1} + q_d \\ &\;\vdots \\ (d+r)p_{d+r} &= B^{d+r}p_0 + B^{d+r-1}q_0 + \ldots + B^{r-1}q_d \\ (d+r+1)p_{d+r+1} &= B^{d+r+1}p_0 + B^{d+r}q_0 + \ldots + B^rq_d \;=\; 0 \end{aligned}$$

Also ist $p_{d+r+1} = 0$, und zu jedem $p_0 \in \mathbb{C}^n$ gibt es eine Polynomlösung vom Grad $\leq d+r$. (Diese müssen natürlich nicht paarweise verschieden sein, wie der Fall $B = 0$ deutlich macht.)

Der allgemeine Fall lässt sich auf obigen Fall und Teil a) mittels der Zerlegung von $\mathbb{C}^n$ in die direkte Summe der Haupträume $V(B;\mu_k)$ zurückführen. Da B singulär ist, existieren in jedem Fall mehrere Polynomlösungen, deren Grad durch $d+p(B;0)$ abgeschätzt werden kann.

36 Ableiten beider Seiten der Gleichung $x = Qy$ ergibt:

$$\dot{x} \;=\; \dot{Q}y + Q\dot{y}$$

Einsetzen in $(*)$ liefert dann

$$\dot{Q}y + Q\dot{y} \;=\; Ax + b\,,$$

und Auflösen nach $\dot{y}$ ergibt daraus:

$$\dot{y} \;=\; Q^{-1}(Ax + b - \dot{Q}y) \;=\; Q^{-1}(AQ - \dot{Q})y + c$$

Ableiten beider Seiten der Gleichung $Q = \Phi e^{-Bt}$ ergibt:

$$\dot{Q} \;=\; \dot{\Phi}e^{-Bt} - \Phi e^{-Bt}B \;=\; AQ - QB$$

Einsetzen liefert schließlich

$$\dot{y} \;=\; Q^{-1}(QB) + c \;=\; B + c$$

und damit die Behauptung.

sawo