Musterlösung zu Blatt 10

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sommersemester 2008

37 Es sei φ eine Lösung der Differentialgleichung mit Fourier-Entwicklung

$$\varphi(t) \;=\; \tfrac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt))$$

mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. In der Fourierentwicklung von

$$|\sin t| \;=\; \tfrac{1}{2}\,\widetilde{a_0} + \sum_{k=1}^{\infty}(\widetilde{a_k}\cos(kt) + \widetilde{b_k}\sin(kt))$$

ist $\widetilde{b_k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, da die Funktion gerade ist, und desweiteren für k ungerade

$$\widetilde{a_k} \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin t|\cos(kt)\,dt \;=\; 0\,,$$

da der Integrand eine ungerade Funktion ist. Sei nun $k \geq 2$ gerade. Es ist

$$\widetilde{a_k} \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin t|\cos(kt)\,dt \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos(kt)\,dt\,.$$

Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi}\sin t\cos(kt)\,dt\\
=\;& -\cos t\cos(kt)\Big|_0^{\pi} - k\int_0^{\pi}\cos t\sin(kt)\,dt\\
=\;& (\cos(k\pi)+1) - k\left(\sin t\sin(kt)\Big|_0^{\pi} - k\int_0^{\pi}\sin t\cos(kt)\,dt\right)\\
=\;& 2 + k^2\int_0^{\pi}\sin t\cos(kt)\,dt
\end{aligned}$$

und damit:

$$\int_0^{\pi}\sin t\cos(kt)\,dt \;=\; \frac{2}{1-k^2}$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\widetilde{a_k} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade}\\ \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1-k^2} & \text{falls } k \text{ gerade}\end{cases}$$

Also ist

$$|\sin t| \;=\; \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}\,.$$

Die Reihe konvergiert offensichtlich absolut und gleichmäßig.

Ableiten von φ ergibt

$$\dot{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(kb_k\cos(kt) - ka_k\sin(kt))$$

und

$$\ddot{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(-k^2a_k\cos(kt) - k^2b_k\sin(kt))\,.$$

Einsetzen der Fourier-Entwicklungen in die Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich liefert schließlich ein lineares Gleichungssystem. Ist k ungerade, so lautet dieses:

$$\begin{array}{rcrcl} (\omega^2-k^2)\,a_k & + & 2\rho k\,b_k & = & 0 \\ -2\rho k\,a_k & + & (\omega^2-k^2)\,b_k & = & 0 \end{array}$$

Da die zugehörige Matrix offenbar positive Determinante hat, ist die Lösung eindeutig bestimmt, und es ist $a_k = b_k = 0$.

Für $k = 0$ ergibt der Koeffizientenvergleich $\frac{1}{2}a_0 = \frac{2A}{\pi\omega^2}$. Ist nun $k \geq 2$ und gerade, so ist das lineare Gleichungssystem inhomogen:

$$\begin{array}{rcrcl} (\omega^2-k^2)\,a_k & + & 2\rho k\,b_k & = & \frac{4A}{(1-k^2)\pi} \\ -2\rho k\,a_k & + & (\omega^2-k^2)\,b_k & = & 0 \end{array}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung lautet:

$$a_k = \frac{4(\omega^2-k^2)A}{(1-k^2)\pi((\omega^2-k^2)^2+4\rho^2k^2)}\,,\quad b_k = \frac{8\rho kA}{(1-k^2)\pi((\omega^2-k^2)^2+4\rho^2k^2)}$$

Bemerkung: Da die obige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung eindeutig bestimmt ist, kann die zugehörige homogene Differentialgleichung keine (nicht trivialen) 2π-periodischen Lösungen besitzen. Dies lässt sich auch mit den Methoden von 12.6 überprüfen.

38 **1. Fall:** $\alpha = \beta = 0$

Dann sind alle Punkte von $\mathbb{R}$ kritisch, und somit ist natürlich jeder Punkt stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

2. Fall: $\alpha = 0$ und $\beta \neq 0$

In diesem Fall ist $x_0 = 0$ der einzige kritische Punkt. Die Differentialgleichung hat getrennte Variablen, und die Lösungen des AWP mit $x(0) = \xi$ lassen sich wie folgt berechnen.

$$\frac{dx}{dt} = \beta x^3 \quad\Leftrightarrow\quad \int_\xi^x \frac{d\rho}{\rho^3} = \int_0^t \beta\,d\tau \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\xi^2} = \beta t$$

und somit:

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\xi^2}-\beta t}}$$

Ist nun $\beta < 0$, so ist die maximale Lösung auf $\left(-\frac{1}{\beta\xi^2},\infty\right)$ definiert mit $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$, d.h. der Nullpunkt ist asymptotisch stabil.

Ist aber $\beta > 0$, so ist die maximale Lösung auf $\left(-\infty, \frac{1}{\beta\xi^2}\right)$ definiert mit $x(t) \to \pm\infty$ für $t \to \frac{1}{\beta\xi^2}$, d.h. der Nullpunkt ist instabil.

3. Fall: $\alpha \neq 0$ und $\beta = 0$

Dieser Fall ist identisch mit dem 2. Fall für $\beta = 1$.

4. Fall: $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$

Stabilitätsaussagen lassen sich hier durch Linearisierung (13.7) aus dem Vorzeichen von $v'(x_0)$ ableiten.

Haben α und β das gleiche Vorzeichen, so ist der Nullpunkt die einzige kritische Stelle. Es ist $v'(0) = \alpha$, und somit ist der Nullpunkt nach dem Satz von Poincaré-Ljapunov (13.8) asymptotisch stabil, falls $\alpha < 0$ ist, und nach dem Satz von Hartmann (13.10) und Bemerkung 11.9 instabil, falls $\alpha > 0$ ist.

Haben α und β unterschiedliches Vorzeichen, so existieren zwei weitere kritische Stellen. Diese erfüllen $x_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$, und es ist $v'(x_0) = \alpha + 3\beta x_0^2 = -2\alpha$. Somit sind beide Punkte nach dem Satz von Poincaré-Ljapunov (13.8) asymptotisch stabil, falls $\alpha > 0$ ist, und beide nach dem Satz von Hartmann (13.10) und Bemerkung 11.9 instabil, falls $\alpha < 0$ ist.

39 a) Die kritischen Punkte sind hier der Nullpunkt und $(1,1)^T$. Stabilitätsaussagen lassen sich mit den Sätzen 13.8 und 13.10 durch Linearisierung (13.7) treffen. Die Funktionalmatrix ist

$$A \;:=\; Dv(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 2y \\ 2x & -1 \end{pmatrix}.$$

Für den Nullpunkt ist sie

$$Dv(0,0) \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

d.h. der Nullpunkt ist nach dem Satz von Poincaré-Ljapunov (13.8) ein Attraktor, da $s(A) < 0$ ist.

Für $(1,1)^T$ besitzt die Funktionalmatrix

$$Dv(1,1) \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

mit charkteristischem Polynom

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \;=\; \lambda^2 + 2\lambda - 3 \;=\; (\lambda+3)(\lambda-1)$$

die Eigenwerte -3 und $+1$, d.h. dieser Punkt ist nach dem Satz von Hartmann (13.10) und Bemerkung 11.9 instabil.

b) Die angegebene Funktion L ist eine Ljapunov-Funktion für den Nullpunkt, denn dieser ist offensichtlich ein isoliertes Minimum von L, und es gilt

$$\partial_v L(x,y) \;=\; \langle \operatorname{grad} L(x,y), v(x,y)\rangle \;=\; -8x^4y^4 \;\leq\; 0$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach Theorem 14.5 ist der Nullpunkt somit stabil. Er ist allerdings nicht asymptotisch stabil, also kein Attraktor, da alle Punkte der Form $(x,0)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $(0,y)$ mit $y \in \mathbb{R}$ stationäre Lösungen liefern.

40 Beachte zunächst, dass wegen der Schiefsymmetrie von B für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$x^T Bx \;=\; (x^T Bx)^T \;=\; x^T B^T x \;=\; -x^T Bx$$

gilt, also $x^T Bx = 0$. Damit folgt:

$$\partial_v L(x) \;=\; \langle \operatorname{grad} L(x), v(x,y)\rangle \;=\; 2(x^T Ax + x^T \gamma(x))$$

Suche nun Bedingungen, unter denen L eine Ljapunov-Funktion für den Nullpunkt ist. Natürlich hat L im Nullpunkt ein isoliertes Minimum.

1. Möglichkeit:

Gilt

$$x^T Ax \;\leq\; 0 \quad \text{und} \quad x^T \gamma(x) \;\leq\; 0$$

auf einer Umgebung des Nullpunkts, so ist der Nullpunkt nach Theorem 14.5 stabil. Gilt für einen der beiden Summanden sogar „<“ für $x \neq 0$, so ist der Nullpunkt asymptotisch stabil. Gilt jeweils „>“ für $x \neq 0$, so ist der Nullpunkt instabil.

2. Möglichkeit:

Es gelte $\gamma(x) = o(|x|)$ für $x \to 0$. Existiert dann ein $\alpha > 0$, so dass $x^T Ax \leq -\alpha|x|^2$ auf einer Umgebung des Nullpunkts gilt, so ist der Nullpunkt asymptotisch stabil, da sich wegen $x^T\gamma(x) = o(|x|^2)$ für $x \to 0$ eine Umgebung des Nullpunkts finden lässt, auf der L eine Ljapunov-Funktion ist.

Ist dagegen $x^T Ax \geq \alpha|x|^2$ auf einer Umgebung des Nullpunkts, so folgt entsprechend, dass der Nullpunkt instabil ist.

sawo